

Trabajo Fin de Grado

Ingeniería Civil

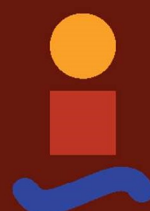
Condiciones de contorno para problemas en medios semi-infinitos mediante el MEF: Perfectly Matched Layers y Elementos Infinitos aplicados a problemas de la interacción suelo-estructura

Autor: Juan Diego Valadés Rodríguez

Tutor: Pedro Galvín Barrera

**Dpto. de Mecánica de los Medios Continuos y
Teoría de Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería**

Sevilla, 2019



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Civil

**Condiciones de contorno para problemas en
medios semi-infinitos mediante el MEF:
Perfectly Matched Layers y Elementos Infinitos
aplicados a problemas de la interacción suelo-
estructura**

Autor:

Juan Diego Valadés Rodríguez

Tutor:

Pedro Galvín Barrera

Catedrático de Universidad

Dpto. de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019

Trabajo Fin de Grado: Condiciones de contorno para problemas en medios semi-infinitos mediante el
MEF: Perfectly Matched Layers y Elementos Infinitos aplicados a problemas de la interacción suelo-
estructura

Autor: Juan Diego Valadés Rodríguez

Tutor: Pedro Galvín Barrera

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis amigos

A mis maestros

Agradecimientos

Sin duda nada de lo conseguido habría sido posible sin determinadas personas que han puesto su esfuerzo para que así haya sido, a las que pertenece el 50% de ello.

Agradecer a mi familia en general, y principalmente a mi madre y a mis tíos, fundamentales en todo esto, por su apoyo incondicional, por darme la oportunidad de poder hacer lo que me más me gusta; por reducir todas las dificultades que en el camino se han encontrado y sobre todo, por aguantarme en las situaciones de máximo estrés. Y lo que os queda.

A mis amigos “de casa”, Alex, Javi, Lucía, Jaime... y todos los demás, porque sois imprescindibles. A mis amigos “de Sevilla” y compañeros de fatiga, Manolo, Alejandra, Vicky, Riki, Víctor... y todos los demás, nadie como vosotros para afrontar este reto, grandes amigos, compañeros de estudio y en un futuro de profesión. Os deseo lo mejor.

A Cecilia, por su apoyo, paciencia, y por hacerlo todo más fácil.

Agradecer a Pedro la oportunidad de realizar este trabajo, y de contar con su tiempo y conocimientos para ello; su constante disponibilidad siempre, y su ayuda en los momentos en que no veía solución. He disfrutado y aprendido a partes iguales durante el proceso.

Gracias.

Sevilla, 2019

Resumen

El presente trabajo versa en general sobre el fenómeno de la interacción suelo-estructura, y en particular, sobre la influencia de las condiciones de contornos en los modelos empleados para el análisis de estructuras en régimen dinámico. Concretamente en modelos basados en el Método de los Elementos Finitos, y sus limitaciones en el análisis de estructuras considerando el suelo donde estas se cimentan, el cual debe ser tratado como un espacio semi-infinito en comparación con la dimensión de las mismas. El trabajo comenzó enfocado al análisis de determinados problemas empleando el software comercial ANSYS, generando modelos que incluyeran elementos tipo PML, es decir, que implementaran la teoría del *Perfectly Matched Layer* como solución a las limitaciones del método. En el transcurso la aplicabilidad de estos elementos se redujo al análisis en el dominio de la frecuencia, y así se recoge en el trabajo, aplicados a problemas de esta forma. Surgía la necesidad de realizar análisis en el dominio del tiempo, para resolver problemas transitorios los cuales conformaban la idea inicial del trabajo. La alternativa de los *Elementos Infinitos* solucionó este obstáculo, y así mismo se aplica esta a la resolución de determinados problemas relacionados con el análisis estructural teniendo en cuenta la interacción suelo-estructura.

El resultado es un trabajo que gira entorno a estas dos técnicas como alternativas útiles para la resolución de este tipo de problemas. Se obtienen los resultados y se establecen comparaciones entre los extraídos de los modelos más simples (sin la consideración del terreno), pasando por modelos de elementos finitos incluyendo el suelo en los mismos, hasta modelos que incluyen elementos PML o elementos infinitos en sus contornos.

Abstract

The present work treats generally on the soil-structure interaction (SSI) phenomenon and particularly on the consideration of special boundary conditions for the models used for the dynamic structural analysis. This is about the FEM models and its limitations on the structural analysis taking into account the interaction with the soil, which has to be modeled as an infinite media in comparison with the structural dimensions.

The work started focused on generating models, with the ANSYS software, which included PML elements as a good alternative to avoid the FEM limitations. During the course of the work the applicability of this elements was only possible for the resolution of problems in frequency domain due to the ANSYS implementation of the Perfectly Matched Layer theory only for time-harmonic analysis. Some SSI problems are solved in the frequency domain.

It was necessary to develop time domain analysis in order to solve some SSI transient problems, which were the initial idea of the work. Infinite Elements technique is applied as an alternative in time domain giving good results for some interesting SSI dynamic problems.

Finally the work covers these two techniques: some theory reference and SSI problems application form the work content. The obtained results are analyzed and comparisons are established between the different models: from the simplest one (without taking into account the soil in the structure response) to the ones which include this type of elements on the boundary.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xiv
Índice de Figuras	xvii
Notación	xxii
1 Introducción	2
1.1. El problema de la interacción suelo-estructura.	2
1.2. Estado del arte.	4
1.3. Condiciones de contorno en modelos de medios semi-infinitos con el MEF.	5
1.4. El suelo.	7
1.5. Contenido del trabajo	9
2 Ondas en medios elásticos	11
2.1. El problema elastodinámico. Ecuaciones básicas.	11
2.1.1 Dilatación y rotación	13
2.2. Ondas armónicas	14
2.3. Propagación de ondas en los medios elásticos	15
3. Enfoque del problema mediante el Perfectly Matched Layer	19
3.1. Idea básica del método	19
3.2. Formulación para el caso unidimensional.	20
3.2.1. Formulación en el medio elástico semi-infinito	21
3.2.2. Definición Del Perfectly Matched Medium (PMM)	25
3.2.3. Generación del Perfectly Matched Layer (PML)	29
3.2.4. Estudio analítico de los parámetros básicos y su efecto en la respuesta.	33
3.3. Implementación en el MEF. Análisis numérico del caso unidimensional.	40
3.4. Análisis numérico del caso unidimensional	45
3.5. Formulación general para el caso tridimensional.	49
4. Caso de aplicación: comportamiento dinámico de cimentaciones	54
4.1. Concepto de rigidez dinámica	54
4.2. El método de la subestructuración para la interacción suelo-estructura	56
4.3. Obtención de la rigidez dinámica de cimentaciones superficiales mediante el MEF.	61
4.3.1. Descripción del modelo	62
4.3.2. Obtención de los resultados: compliancia vertical.	66
4.3.3. Obtención de los resultados: impedancia al giro.	75
4.4. Conclusiones	78
5. Enfoque del problema mediante los elementos infinitos	80
5.1. Introducción	80

5.2. Base teórica	80
5.3. Mapped Infinite Elements (MIF)	81
5.3.1. Caso unidimensional	81
5.3.2. Casos bidimensionales y tridimensionales	85
5.4. Decay Type Infinite Elements (DIF)	89
5.5. Contornos viscosos de J. Lysmer y Roger L. Kuhlemeyer [15].	91
5.6. PML vs E. Infinitos	94
5.7. Verificación: semiespacio sometido a carga escalón	95
6. Caso de aplicación: comportamiento dinámico de puentes de ferrocarril	99
6.1. Introducción	99
6.2. Análisis frente a carga móvil aislada	100
6.3. Estudio del comportamiento dinámico a flexión de puentes de ferrocarril de 25 metros de luz.	102
6.3.1. Descripción geométrica del modelo	102
6.3.2. Tipos de suelos a considerar	104
6.3.3. Descripción del modelo de elementos finitos	104
6.3.4. Viga simple: frecuencias y modos naturales de vibración	107
6.3.5. Análisis y resultados	109
6.3.6. Resonancia y cancelación.	119
6.4. Conclusiones	124
7. Caso de aplicación. Vibraciones en estructuras inducidas por el paso de cargas móviles a alta velocidad	126
7.1. Descripción del modelo	127
7.2. Frecuencias y modos naturales de vibración	128
7.3. Respuesta estructural en suelo blando.	130
7.4. Respuesta estructural en diferentes tipos de suelos	138
7.5. Conclusiones	142
8. Conclusiones y desarrollos futuros	144
Referencias	146
Anexo. Códigos empleados.	151

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Presa de Alcántara en el cauce del río Tajo durante el desembalse, como ejemplo de estructura másica.	2
Figura 1.2. Viaducto de archidona. Línea de Alta Velocidad Córdoba-Granada.	3
Figura 1.3. Tabla III de E. Alarcón [17]. Modelos asumibles, ensayos necesarios y propiedades características del suelo en función del rango de deformaciones esperado.	7
Figura 1.4. A la izquierda la composición del suelo según Casagrande (1940), a la derecha el medio poroelástico de Biot (1956)	8
Figura 2.1. Propagación y desplazamiento de los puntos en una onda de tipo P: s equivale a q en la notación empleada.	16
Figura 2.2. Propagación y desplazamiento de los puntos en una onda de tipo S: s equivale a q en la notación empleada.	16
Figura 3.1. Barra teórica semi-inifinita.	21
Figura 3.2. Equilibrio en la sección diferencial.	22
Figura 3.3. Ilustración sobre la propiedad de combinación perfecta	27
Figura 3.4. Barra semi-infinita compuesta por tramo elástico y tramo PMM	29
Figura 3.5. Barra finita compuesta por tramo elástico y tramo con propiedades PMM.	30
Figura 3.6. Comportamiento de la oscilación en función del valor que toma f_0 .	31
Figura 3.7. Comportamiento de la oscilación de acuerdo al valor del coeficiente m	32
Figura 3.8. Función de atenuación y su integral a lo largo de la barra.	32
Figura 3.9. Comportamiento de la onda a lo largo de la barra.	33
Figura 3.10. Oscilación en una coordenada real.	34
Figura 3.11. Aenuación de la oscilación conforme la coordenada se adquiere una parte compleja.	34
Figura 3.12. Parte real e imaginaria de la coordenada.	34
Figura 3.13. Rigiez dinámica según los valores de L/r_0 , disponiendo profundidad L_p insuficiente ($L_p < r_0$)	38
Figura 3.14. Resultados obtenidos para la rigidez dinámica en función de la longitud elástica (L/r_0) empleando una profundidad del PML suficiente ($L_p > r_0$)	38
Figura 3.15. Resultados obtenidos para diferentes valores de f_0 .	39
Figura 3.16. Resultados obtenidos para diferentes grados de la función de atenuación.	40
Figura 3.17. Resultados obtenidos para la rigidez dinámica en inicio de la barra para un número de 10 elementos en la zona elástica (n_e) y diferentes elementos en la zona del PML (n_p)	47
Figura 3.18. Resultados obtenidos para la rigidez dinámica en inicio de la barra para un numero de 60 elementos en la zona elástica (n_e) y diferentes elementos en la zona de PML (n_p)	48
Figura 3.19. Desplazamientos longitudinales en la barra para diferentes frecuencias de excitación.	49
Figura 4.1. Esquema del modelo simplificado producto del método. Las rigideces serán funciones de la frecuencia.	57

Figura 4.2. Grados de libertad en una cimentación rígida tridimensional.	60
Figura 4.3. Esquemas de modelos con y sin capa de elementos PML en los contornos.	62
Figura 4.4. Esquema de los modelos a generar en ANSYS	63
Figura 4.5. Esquema geométrico del elemento SOLID185	65
Figura 4.6. Volúmenes y mallado del modelo que incluye la zapata.	66
Figura 4.7. Compliancia vertical obtenida mediante el modelo sin PML	68
Figura 4.8. Compliancia vertical obtenida mediante modelo con PML. $L_p=3\text{ m}$; $L_s=8\text{ m}$; $B=2\text{ m}$; $L_h=4\text{ m}$	68
Figura 4.9. Deformada (arriba) y solución nodal para el desplazamiento vertical (U_z) (abajo), para una misma frecuencia, a la izquierda en el modelo con PML, a la derecha en el modelo sin PML.	69
Figura 4.10. Resultados de compliancia vertical para el modelo que incorpora la zapata (Model. Cim), y las diferentes condiciones en la interfase, para el que no la incorpora: acoplamiento del grado de libertad de desplazamiento vertical (CEQ z) y acoplamiento de los tres grados de libertad de desplazamiento (CEQ xyz).	70
Figura 4.11. Resultados para la compliancia vertical obtenidos por otros autores, y obtenidos en este trabajo para los modelos con cimentación (Model. Cim.) y sin cimentación acoplando el grado de libertad de desplazamiento vertical (CEQ z)	71
Figura 4.12. Resultados obtenidos para la compliancia vertical, empleando diferentes valores de amortiguamiento	72
Figura 4.13. Resultados obtenidos para diferentes tamaños de suelo modelizado, L_s .	73
Figura 4.14. Resultados (parte real de la compliancia), para los diferentes espesores de capa PML empleados.	73
Figura 4.15. Resultados (parte imaginaria de la compliancia) para los diferentes espesores de capa PML empleados.	74
Figura 4.16. Resultados (parte real de la compliancia), obtenidos para diferente número de elementos en la capa PML.	74
Figura 4.17. Resultados (parte imaginaria de la compliancia), obtenidos para diferente número de elementos en la capa PML.	75
Figura 4.18. Capa PML con 3 elementos.	75
Figura 4.19. Esquema geométrico del elemento Shell181 de ANSYS	76
Figura 4.20. Resultados obtenidos para la impedancia al giro mediante modelo sin PML.	77
Figura 4.21. Resultados para la impedancia al giro empleando modelos con PML. Comparativa con los resultados obtenidos por otros autores.	77
Figura 4.22. Resultados obtenidos para la impedancia al giro empleando diferentes valores del amortiguamiento en el suelo.	78
Figura 5.1. Esquema de relación para el caso unidimensional.	81
Figura 5.2. Funciones de mapeo para el caso unidimensional.	84
Figura 5.3. Elemento cuadrático de Lagrange de 9 nodos	86
Figura 5.4. Funciones de mapeo para el elemento considerado.	88
Figura 5.5. Ejemplo de funciones de forma de elementos infinitos.	91
Figura 5.6. Esquema de los modelos con PML y elementos infinitos.	94
Figura 5.7. Carga escalón.	95
Figura 5.8 Generación de los elementos infinitos en el contorno.	95

Figura 6.1. Esquema de la carga aplicada.	100
Figura 6.2. Croquis en alzado del modelo generado.	103
Figura 6.3. Sección del puente viga. Formada por la losa de hormigón y el perfil metálico.	103
Figura 6.4. Esquema del elemento BEAM188 de Ansys. Ansys MAPDL Element Library.	105
Figura 6.5. Esquema del elemento INFIN257 de Ansys. Ansys MAPDL Element Library.	106
Figura 6.6. Modelo de estribos en ANSYS:	106
Figura 6.7. Modelo de suelo, estribos y tablero.	107
Figura 6.8. Modelo de tablero (izquierda), y suelo con elementos infinitos (derecha)	107
Figura 6.9. Primeros cinco modos naturales de vibración del tablero.	108
Figura 6.10. Tendencia de la respuesta en función de la rigidez del suelo, para modelos con elementos infinitos (C/EInf.) y sin ellos (S/EInf.).	110
Figura 6.11. Desplazamiento en el centro del vano para el modelo con suelo tipo I.	110
Figura 6.12. Aceleración en el centro del vano para un suelo tipo I.	111
Figura 6.13. Desplazamiento en el centro del vano para un suelo tipo II.	111
Figura 6.14. Aceleración en el centro del vano para un suelo tipo II.	112
Figura 6.15. Respuesta en centro de vano para un suelo tipo III.	112
Figura 6.16. Desplazamiento en el centro de vano para los diferentes suelos considerados en los modelos con elementos infinitos.	113
Figura 6.17. Desplazamiento en el centro de vano para los diferentes suelos considerados en los modelos sin elementos infinitos.	113
Figura 6.18. Contenido en frecuencia de la respuesta para el modelo de viga simple sin consideración del suelo.	114
Figura 6.19. Contenido en frecuencia de la respuesta para el modelo con suelo tipo I.	115
Figura 6.20. Contenido en frecuencia de la respuesta para el modelo con suelo tipo II.	115
Figura 6.21. Contenido en frecuencia de la respuesta para el modelo con suelo tipo III.	116
Figura 6.22. Asiento experimentado por un estribo para los diferentes suelos.	116
Figura 6.23. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.3 segundos.	117
Figura 6.24. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.74 segundos.	117
Figura 6.25. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 1.27 segundos.	117
Figura 6.26. Campo de desplazamientos en los elementos infinitos para un tiempo de integración de 1.07 segundos.	118
Figura 6.27. Vista en planta del campo de desplazamientos en los elementos infinitos para un tiempo de integración de 0.3 segundos	118
Figura 6.28. Deformada del tablero para un tiempo de integración de 0.4 segundos.	119
Figura 6.29. Factor R_n teórico frente a velocidad de la carga, para el primer y segundo modo.	121
Figura 6.30. Amplitud de la respuesta en vibración libre para suelo tipo I.	122
Figura 6.31. Amplitud de la respuesta en vibración libre para suelo tipo II.	122
Figura 6.32. Amplitud de la respuesta en vibración libre para suelo tipo I.	123
Figura 6.33. Amplitudes de la respuesta en vibración libre para los diferentes tipos de suelo. (Modelos sin elementos infinitos)	123
Figura 6.34. Velocidades [km/h] de resonancia y cancelación para los diferentes modelos.	124

Figura 7.1. Esquema en planta del modelo empleado.	127
Figura 7.2. Modelos sin elementos infinitos (izquierda) y con elementos infinitos (derecha).	128
Figura 7.3. Nueve primeros modos naturales de vibración de la estructura.	129
Figura 7.4. Aceleración en dirección x para un suelo tipo I en un punto del forjado superior.	130
Figura 7.5. Aceleración en dirección y para un suelo tipo I en un punto del forjado superior.	131
Figura 7.6. Aceleración en dirección z para un suelo tipo I en un punto del forjado superior.	131
Figura 7.7. Desplazamientos horizontales para un suelo tipo I en un punto del forjado superior.	132
Figura 7.8. Desplazamiento vertical para un suelo tipo I en un punto del forjado superior.	133
Figura 7.9. Contenido en frecuencia de la respuesta en dirección X para el modelo con suelo tipo I.	133
Figura 7.10. Contenido en frecuencia de la respuesta en dirección Y para el modelo con suelo tipo I.	134
Figura 7.11. Contenidos en frecuencia para las respuestas horizontales.	135
Figura 7.12. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.336 segundos.	136
Figura 7.13. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.504 segundos.	136
Figura 7.14. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.576 segundos.	137
Figura 7.15. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 1.44 gundos.	137
Figura 7.16. Campo de desplazamientos en los elementos infinitos.	138
Figura 7.17. Aceleración en dirección X para los modelos con elementos infinitos.	139
Figura 7.18. Aceleración en dirección X para los modelos sin elementos infinitos.	139
Figura 7.19. Aceleraciones en dirección Y para los modelos con elementos infinitos (izquierda) y sin ellos (derecha).	140
Figura 7.20. Desplazamiento en dirección X para los modelos con elementos infinitos.	140
Figura 7.21. Desplazamiento en dirección X para los modelos sin elementos infinitos.	141
Figura 7.22. Contenido en frecuencia de la respuesta para los diferentes suelos considerados, en modelos con elementos infinitos.	141
Figura 7.23. Contenido en frecuencia de la respuesta para los diferentes suelos considerados, en los modelos sin elementos infinitos.	142

Notación

Ω	Dominio de integración general
$\partial\Omega$	Contorno del dominio de integración general
$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$	Operador diferencial Nabla
$\nabla \cdot \mathbf{F}$	Divergencia del campo vectorial \mathbf{F}
$\nabla \times \mathbf{F}$	Rotacional del campo vectorial \mathbf{F}
∇f	Gradiente del campo escalar f
Re, Real	Parte real
Im, Imag	Parte imaginaria
S	Rigidez dinámica general
S^∞	Rigidez dinámica del medio semi-infinito
Ω_{pmm}	Dominio de tipo PMM
Γ	Interfase entre dos medios
Ω_g	Dominio de suelo
Ω_e	Dominio de estructura
Ω_{PM}	Dominio tipo PMM truncado -> PML
f	Función de atenuación en el PML
\bar{F}	Función integral de la función de atenuación
N_i	Función de forma asociada al nodo i
M_i	Función de mapeo asociada al nodo i
L_i^n	Polinomio de Lagrange de grado n asociado al nodo i
G, μ	Módulo de elasticidad transversal, módulo de corte o segundo parámetro de Lamé
E	Módulo de elasticidad longitudinal
ρ	Densidad
c_s	Velocidad de propagación de las ondas de corte, S
c_p	Velocidad de propagación de las ondas longitudinales, P
Δt	Paso de tiempo en la integración
f_s	Frecuencia de muestreo

1 INTRODUCCIÓN

1.1. El problema de la interacción suelo-estructura.

En la búsqueda del conocimiento sobre el comportamiento de las estructuras, y así mismo en la generación de modelos numéricos más o menos complejos de cara a este objetivo siempre habrá algo presente, entre otros aspectos, y es la sustentación de dicha estructura o su unión al mundo. Es bien sabido que dicha unión tiene implicaciones directas en el comportamiento de las estructuras, implicaciones que se han de tener en cuenta a la hora de su cálculo y diseño. Si bien en el régimen estático analizar las estructuras suponiendo su unión a un medio infinitamente rígido puede suponer errores considerables, es en el régimen dinámico (o cuando las cargas adquieren una variabilidad temporal tal que los efectos inerciales y viscosos no pueden ser ignorados) cuando esta práctica hace aguas. El comportamiento dinámico de las estructuras está fuertemente (en algunos casos más que en otros) influenciado por el suelo o terreno donde esta se sustenta de una u otra forma. Estas implicaciones se ponen de manifiesto tanto en las frecuencias de vibración que exhiben las respuestas como en las amplitudes que estas adquieren. El suelo participa de la respuesta con la estructura como un sistema acoplado, proporcionándole una determinada inercia, y un amortiguamiento adicional. Es este último quizás uno de los factores principales en este fenómeno: por un lado, el amortiguamiento material del suelo y por otro, y con mayor importancia incluso, el amortiguamiento de radiación que este proporciona. Las vibraciones que se producen en las estructuras son transmitidas al cimiento y de este al suelo donde se propagan en forma de ondas. Esto representa una disipación de energía en forma de dichas ondas, y es un fenómeno que debe ser tenido en cuenta en los cálculos.

Este hecho lleva asociada la necesidad de tener en cuenta el suelo en los modelos de cálculo. Para ello, de forma general, se diferencian dos metodologías diferentes: Métodos Directos y Métodos de Subestructuración. El primero de los métodos responde a modelos que integran de forma completa la estructura y un volumen de suelo, y se establecen los acoplamientos necesarios entre estructura y suelo, reproduciendo de la forma más fiel posible la situación real. Estos modelos se someterán a las sollicitaciones pertinentes, extrayendo la respuesta de la estructura en conjunto con el suelo. El segundo se basa en la superposición de problemas más simples los cuales tienen en cuenta fenómenos particulares, para acabar obteniendo un modelo simplificado con el que evaluar el fenómeno. Esto se trata en capítulos posteriores.



Figura 1.1. Presa de Alcántara en el cauce del río Tajo durante el desembalse, como ejemplo de estructura mísica.

De forma general, podemos descomponer el fenómeno de la interacción suelo-estructura en dos fenómenos físicos: una interacción cinemática y una interacción inercial. La primera de ellas no es más que la alteración que provoca en el campo de desplazamientos del suelo la presencia de una determinada estructura con una cimentación, generalmente de rigidez muy superior al suelo que la rodea. Un determinado movimiento o perturbación que se propague por el terreno (frentes de ondas de diferente naturaleza) se verán alterados por la presencia de dicha cimentación, desembocando en fenómenos de refracción y reflexión de ondas, distanciándose la respuesta del terreno de la que obtendría si no existiera dicha estructura. El segundo, la interacción inercial ya mencionada, relacionada con las propias vibraciones que se producen en la estructura y se transmiten a cimentación y terreno.

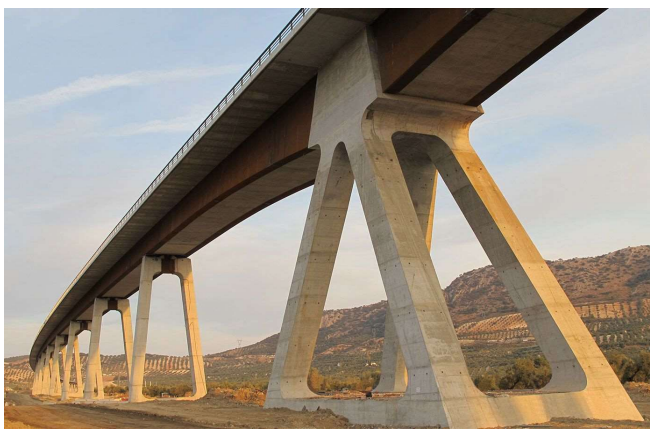


Figura 1.2. Viaducto de archidona. Línea de Alta Velocidad Córdoba-Granada.

Si bien es cierto que todas las estructuras presentan esta interacción con el terreno, es en algunas de ellas donde dicho fenómeno tiene mayores implicaciones. Es tradicionalmente en las cimentaciones para plantas con maquinaria pesada, que transmite elevadas vibraciones al terreno, indispensable la consideración de este fenómeno; las estructuras para plantas de energía nuclear; las estructuras que poseen una elevada masa como son las presas de gravedad (también las presas en arco, bóveda...etc.), las estructuras para el tráfico ferroviario, fuentes de importantes vibraciones.

En la generación de modelos para la evaluación de este fenómeno en el comportamiento estructural surgen diversas dificultades relacionadas con diferentes elementos, que acaban haciendo de este un problema bastante complejo. La dificultad comienza asociada al propio suelo, y a la dificultad intrínseca que presenta el conocimiento del comportamiento de este. Son extendidos los modelos de cálculo que suponen un comportamiento elástico-lineal, isótropo y homogéneo para el medio que representa el suelo. Es bien sabido que en el comportamiento del suelo hay poco de linealidad, de isotropía y mucho menos de homogeneidad. Si bien, los primeros ofrecen buenos resultados y han servido en rangos de deformaciones pequeñas y bajo determinadas consideraciones, la Mecánica del Suelo estudia el comportamiento de este y ofrece modelos más complejos que lo caracterizan mejor, pero que agregan complejidad al problema.

Otra de las dificultades está relacionada con el carácter semi-infinito del medio. Desde el punto de vista del cálculo estructural el suelo responde a un medio semi-infinito, en el cual las perturbaciones se propagan en forma de ondas sin ningún obstáculo que impida su radiación, la cual como se ha comentado es crucial en la respuesta del sistema. Es obvio que los modelos de cálculo han de ser finitos, y encontramos aquí la dificultad de plasmar el comportamiento de radiación mencionado, dado que en los modelos será necesaria la introducción de determinadas fronteras que inducirán a resultados erróneos.

La existencia de estas fronteras, y la aplicación de determinadas condiciones sobre las variables que gobiernan el problema en ellas, provocará que las ondas que se propagan en el medio que modeliza el suelo encuentren determinados obstáculos y se reflejen hacia el interior del dominio de interés. Esto evidentemente es completamente irreal y llevará asociado errores en los resultados obtenidos, siendo imposible la correcta modelización del fenómeno. En la búsqueda de soluciones a este problema surgen diferentes alternativas que permiten obtener modelos donde se minimiza esto, sin necesidad de aumentar el tamaño del mismo de forma notable, lo que respondería a costes computacionales demasiado elevados. Es este el tema en que se concentra este trabajo, y en lo que sigue se agrega más al respecto.

1.2. Estado del arte.

El interés por la consideración de la interacción suelo-estructura comienza ligado al análisis sísmico de estas, especialmente edificaciones, y al cálculo y diseño adecuado de cimentaciones para maquinaria pesada la cual induce vibraciones considerables al terreno. En los comienzos de estos estudios (mitad de siglo XX) en el cálculo de estas cimentaciones se empleaban modelos muy simples de tipo Winkler, donde el suelo era modelizado mediante resortes que representaban la rigidez que este ofrecía. Fue Reissner (1936) [21] el primero en analizar la rigidez de una cimentación modelizando el suelo como un medio semiespacio infinito. Tras ello han sido numerosos autores los encargados de estudiar la respuesta dinámica de cimentaciones sobre medios elásticos (Veletsos y Wei, 1971 [22]) y sobre medios viscoelásticos (Veletsos y Vebric, 1973 [23]); el comportamiento dinámico de cimentaciones de forma arbitraria fue analizado por (Wong y Luco, 1976 [8]).

Entre los métodos numéricos empleados, el Método de los Elementos Finitos proporcionó resultados a este tipo de problemas, pero con claras limitaciones. Las desventajas que este método posee son debidas fundamentalmente al carácter infinito del medio que dificulta una correcta modelización del mismo, siendo necesario incorporar fronteras irreales en el modelo fruto de la necesidad de truncar el mismo. Se harán algunas consideraciones más en el siguiente apartado.

Una formulación integral del problema en el contorno da lugar al Método de los Elementos de Contorno (MEC), el cual se presenta de gran utilidad en la resolución de problemas relacionados con el fenómeno de la interacción suelo-estructura. Esto es debido, en primer lugar, a la condición de radiación de las ondas en el medio infinito, satisfecha de forma intrínseca a la formulación del propio método, en concreto a la solución fundamental en la que se apoya; y además, a la necesidad de discretizar únicamente la superficie libre del medio, dando lugar así a modelos menos costosos computacionalmente que los que proporciona el MEF.

El MEC se aplicó a la resolución de este tipo de problemas, como los anteriormente mencionados, o sobre la difracción de ondas sísmicas por cimentaciones superficiales (Domínguez, 1978b [24]), y por cimentaciones embebidas en medios viscoelásticos (Karabalis et al., 1984 [26]). Estudiaron la respuesta dinámica de cimentaciones sobre medios estratificados (Gómez-Lera et al. 1985 [27], Alarcón et al. 1989, y Emperador y Domínguez, 1989 [28]), medios viscoelásticos (Domínguez 1978a, b [24] [25]), (Otternstreuer, 1982), entre otros.

Es necesario destacar también la formulación poroelástica de Biot (1956) [29] o poroelastodinámica. Propone una formulación al problema de la propagación de las ondas en medios porosos saturados, formados por un esqueleto sólido y un fluido en los intersticios, estableciendo los correspondientes comportamientos en los comportamientos de ambas fases. Esta formulación se implementa en el MEC para la resolución de problemas sobre el comportamiento dinámico de las cimentaciones en medios poroelásticos por (Halpern, 1982) y (Halpern y Christiano, 1986 [30], [31])

por primera vez, seguidos de otros como (Chopra y Dargush, 1995 [32]). Por otro lado, es (Bougacha et al., 1993a, b) [33][34], quien estudia este problema de cimentaciones sobre medios poroelásticos mediante la aplicación del MEF.

Dejando a un lado los problemas de interacción suelo-estructura relacionados con la caracterización dinámica de las cimentaciones, diversos otros problemas han sido de interés en esta área. Como es, por ejemplo, el estudio del comportamiento dinámico asociado al ferrocarril y su implicación desde el cálculo y diseño de las infraestructuras que le sirven para funcionar, hasta la evaluación de las vibraciones que este produce en las proximidades de dichas infraestructuras. El tráfico ferroviario lleva asociado el fenómeno vibratorio, por la propia naturaleza de las cargas que transmite, sumada a la existencia de las irregularidades en las vías, irregularidades en el contacto rueda-carril, etc., fenómeno el cual se ve incrementado cuando de la alta velocidad se trata. Este problema es de relevancia notable, y son numerosos autores los que han contribuido al conocimiento en esta área. Cabe destacar en sus inicios a (Krylov, 1995 [35]) que estudiaba las vibraciones ocasionadas por este tipo de tráfico, y su relación con la velocidad de circulación. En este problema es clave el fenómeno de propagación de las ondas en el suelo, por lo que de nuevo estamos ante problemas definidos en un medio semi-infinito. En cuanto a los modelos de cálculo desarrollados en este ámbito debemos destacar aquellos basados en la formulación del Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC): modelos que acoplan ambos métodos de forma tridimensional son los desarrollados por (P. Galván y J. Domínguez, 2007 [36]), (E. Celebi, 2006); (P. Galván, A. Romero y J. Domínguez, 2010, 2014 [37][38]), con estos se modeliza la interacción vehículo-vía y suelo-estructura, permitiendo analizar las vibraciones inducidas por estas cargas en las estructuras que la soportan y además en aquellas que se encuentren próximas. Estos modelos emplean Elementos Finitos para la modelización de los vehículos, vías y estructuras, y elementos de contorno para la modelización del suelo y la propagación de ondas en él: uniendo la potencia y ventajas de cada uno de los métodos. Otros modelos desarrollados en este ámbito son los conocidos modelos 2.5D donde se supone indeformable la vía y el suelo en dirección longitudinal, (S. François et al. 2010 [39]) (G. Lombaert et al. 2009).

Evidentemente se recoge un breve resumen de todo el estudio realizado entorno a la interacción con el suelo de diferentes estructuras. Otras estructuras con fuerte interacción con el suelo son las presas, tanto presas de gravedad como presas bóveda, u otras tipologías, se presentan como estructuras de elevada masa, cuya interacción con el suelo juega un papel fundamental en el comportamiento sísmico de las mismas. Para la evaluación del comportamiento de estas se han desarrollado modelos que emplean elementos de contorno (J. Domínguez y F. Medina, 1989 [40]) para la consideración de la estructura y su interacción con el suelo y el fluido, (A.K. Chopra y P. Chakrabarti, 1981), incluyendo la interacción con los sedimentos (F. Medina, J. Domínguez y J. L. Tassoulas, 1990 [41]), entre otras obras.

1.3. Condiciones de contorno en modelos de medios semi-infinitos con el MEF.

Siendo el Método de los Elementos Finitos una herramienta de cálculo de gran potencia y que se presenta de gran utilidad para la resolución de problemas de complejidad muy elevada presenta algunos inconvenientes cuando de la modelización de medios semi-infinitos se trata. En los problemas de la interacción suelo-estructura, como ejemplo de interés aquí, dicho inconveniente radica en la necesidad de truncar el modelo de estudio a una determinada distancia de la estructura en cuestión. Es decir, se crearán fronteras ficticias en el modelo de suelo, las cuales tendrán implicaciones directas en el comportamiento que presente el sistema. Como ya se ha comentado, es el amortiguamiento de radiación que presenta el terreno el principal factor que interviene en esta interacción, fenómeno el cual no será posible reproducir en lo numérico con la existencia de dichas fronteras ficticias en los modelos.

Es así como numerosos autores han puesto esfuerzo en conseguir un correcto modelizado de este

fenómeno surgiendo de esta forma una gran cantidad de alternativas propuestas para ello. De forma resumida podemos mencionar, de acuerdo a Kausel y Tassoulas (1981) [42] tres tipos de bordes empleados frecuentemente en los modelos con este objetivo: los **bordes elementales** o no transmisores, los **bordes locales** y los **bordes consistentes**. Los primeros de ellos son bordes rígidos habituales donde se impone una condición de contorno sobre el campo de desplazamientos o de tensiones, siendo así los que inducen mayores errores en los resultados obtenidos: suponen una reflexión total de las ondas hacia el interior del modelo provocando el efecto de *caja cerrada*. Los **bordes locales** o viscosos se materializan mediante la disposición de amortiguadores viscosos en los contornos, ajustando el coeficiente de amortiguamiento de forma adecuada de cara a absorber las ondas de cuerpo incidentes. Este tipo de bordes funciona para ciertas ondas y ciertos ángulos de incidencia. Por último, los **bordes consistentes** se presentan como bordes capaces de absorber todo tipo de ondas de cuerpo y superficie. Se representan como combinación de muelles, amortiguadores y masas concentradas.

De entre las condiciones de contorno de los diferentes tipos anteriores desarrolladas podemos destacar los **bordes de Lysmer-Kuhlemeyer** [15] de tipo viscosos, los cuales se basan en la disposición de amortiguadores viscosos normales y tangenciales a los contornos. Estos bordes absorben completamente las ondas de cuerpo que incidan normales a los contornos y funcionan en el dominio del tiempo y la frecuencia. Otro condición de contorno de interés en problemas lineales de propagación de ondas es el **borde de Smith** el cual, aplica superposición a los resultados obtenidos de aplicar en el contorno condiciones de Dirichlet y Neumann, las cuales generan reflexiones de signo opuesto, anulándose estas en la superposición. Esta condición funciona para todo ángulo de incidencia, con desventajas ligadas a la necesaria linealidad del problema, entre otras. El **borde de Waas** (1972) [43], posteriormente modificado por Kausel (1974) [44] es un borde de tipo consistente, el cual funciona de forma exacta en el dominio de la frecuencia. Para cualquier tipo de onda e incidencia. Otras modificaciones sobre este borde fueron realizadas por Alheid et al. (1985), aplicando este bajo ciertos ajustes al dominio del tiempo. Otros son **el borde clonado de Roesset y Scaletti** (1979), el borde de campo libre como extensión del de Lysmer-Kuhlemeyer, etc.

Las condiciones de borde anteriores pueden encontrarse clasificadas de forma general como condiciones de borde absorbentes o locales aproximadas. Existen otras condiciones de borde denominadas transparentes, las cuales son satisfechas por la propia ecuación de gobierno. Por otro lado, el método del **Perfectly Matched Layer** o capas perfectamente combinadas se presenta como alternativa a la generación de contornos no reflectantes. Este método se emplea en el presente trabajo y se describe con mayor detalle en capítulos posteriores. De forma resumida, este método nace para la resolución de problemas electromagnéticos (véase J.P. Berenger (1994) [45]) y su aplicación se extiende a problemas acústicos y elastodinámicos entre otros. Desarrollan trabajos sobre la aplicación del PML a problemas de propagación de ondas en medios elásticos F. Collino, C. Tsogka (2001) [16] para medios anisótropos y heterogéneos; U. Basu y A. K. Chopra (2003) [4] ofrecen una formulación en el dominio de la frecuencia, y posteriormente (2004) una formulación para la resolución de problemas transitorios en el dominio del tiempo.

Por último, agregar a este resumen de métodos empleados para solucionar el problema de los contornos en este tipo de modelos la formulación de los elementos infinitos, debida en sus inicios a P. Bettess (1977)[14], y R.F. Ungless (1973)[46]. Dicha formulación se presenta como una extensión del MEF, donde a determinados elementos se les aplica determinadas transformaciones en las funciones de forma de cara a lograr por un lado su *extensión* al infinito, y el carácter de atenuación de la variable que se aproxima. Se dedica un capítulo a mostrar de forma breve la base teórica tras dicho método, y se aplica a problemas de la interacción suelo-estructura posteriormente.

1.4. El suelo.

Siendo el estudio del suelo y su comportamiento uno de los factores clave en diferentes ramas de la ingeniería Civil, Geotécnica, Marítima y donde todas estas confluyen, resulta ser además de una naturaleza de elevada complejidad. La Geotecnia, y particularmente la Mecánica del Suelo y las Rocas es la disciplina dedicada a la comprensión, modelización y aplicación del comportamiento de los suelos a la generación de actuaciones en el mismo proporcionando a las mismas la seguridad necesaria. Se proponen una gran variedad de modelos que persiguen plasmar de la forma mas fiel la respuesta de este medio ante las cargas a las que se verá sometido tanto por las construcciones que se ejecuten en él como por la propia naturaleza. Se dedican aquí unas líneas a nombrar de forma muy resumida algunos modelos extendidos, y aspectos que influyen en su elección. Es necesario remitir a la bibliografía clásica donde encontrar conocimiento en profundidad sobre esto, como es Geotecnia y Cimientos de J. Salas et al. (1980) [47], las innumerables aportaciones de A. Casagrande y K. von Terzaghi [48], entre otros. Las ideas aquí resumidas pueden encontrarse en profundidad en E. Alarcón (1989) [17].

Si bien es sabido que el suelo se compone de diferentes fases agregadas: un esqueleto sólido, que deja unos intersticios donde se encontrará el aire y el agua principalmente, la caracterización del mismo mediante modelos de la Mecánica de los Medios Continuos han servido para dar muy buenos resultados. Evidentemente la presencia de estas fases en el suelo dirá algo en su respuesta, y el predominio de una fase sobre otra dará lugar a composiciones diferentes que exhibirán comportamientos así mismo diferentes: suelos drenados, suelos parcial o totalmente saturados; el carácter del esqueleto sólido y su tamaño será así mismo determinante: suelos granulares, suelos finos (arcillas, limos); propiedades mecánicas como la cohesión y el rozamiento interno del suelo juegan un papel fundamental en su respuesta; las tensiones que aparecen en el conjunto (totales) serán soportadas por sus fases en forma de tensiones efectivas en el esqueleto sólido y tensiones intersticiales o de poros en el fluido incompresible que en ellos se encuentra, según apuntaba Terzaghi, entre otras numerosas consideraciones.

	10 ⁻⁶	10 ⁻⁵	10 ⁻⁴	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹
7						
METODO DE CALCULO	LINEAL		LINEAL EQUIVALENTE		INTEGRACION PASO A PASO	
LEY DE COMPORT.	MODELO ELASTICO LINEAL		MODELO VISCOELASTICO LINEAL MODELOS HISTERETICOS		LEYES INCREMENTALES (RAMBERG-OSGOOD, ETC.)	
PROPIEDAD TIPO	RIGIDEZ G_0 ← RIGIDEZ G_0 DISIPACION ζ → DEFORMACIONES PERMANENTES RESISTENCIA, ESTABILIDAD					
FENOMENOS TIPOICOS	VIBRACIONES PROVOCADAS POR MAQUINAS		TERREMOTOS		EXPLOSIONES	
ENSAYOS DE LABORATORIO	COLUMNA RESONANTE (PROBETAS MACIZAS) ... TRIAxIAL CICLICO CORTE CICLICO COLUMNA RESONANTE (PROBETAS HUECAS) PLATAFORMA VIBRANTE					
ENSAYOS DE CAMPO	PROSP. GEOF. VIBR. SUP. PLACA CARGA ENSAYO CILINDRICO «IN SITU» (CIST) UP-HOLE; SOWN-HOLE; CROSS-HOLE					
7						
	10 ⁻⁶	10 ⁻⁵	10 ⁻⁴	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹

Figura 1.3. Tabla III de E. Alarcón [17]. Modelos asumibles, ensayos necesarios y propiedades características del suelo en función del rango de deformaciones esperado.

Tal es la complejidad que la generación de modelos matemáticos que se aproximen a reproducir este comportamiento necesita de numerosos ensayos de laboratorio y campo, que proporcionen conocimiento experimental sobre la respuesta de diferentes suelos ante diferentes situaciones. Ensayos para la respuesta ante tensiones normales como los de carga triaxial, monoaxial o compresión simple, ensayos edométricos; ante la presencia de esfuerzos de corte, como el corte directo; en situación de drenaje, o sin él, etc. Ensayos dinámicos revelan los errores cometidos al emplear modelos elásticos en el comportamiento de estos medios, cuando la carga varía en el tiempo aparecen fenómenos de histéresis en la respuesta del suelo los cuales representan una pérdida de energía por amortiguamiento interno y una variabilidad de los parámetros como el módulo de corte, G , con la carga aplicada. Estos ensayos dinámicos proporcionan conocimiento sobre el valor que adquieren las propiedades mecánicas con las que caracterizar el medio en los modelos. El nivel de simplificación (siempre existente) en el modelo que se elija, dependerá o debiera hacerlo, de las cargas y fundamentalmente, del rango de deformaciones que se espere en el fenómeno estudiado. Una idea sobre esto se recoge en la Figura 1.3. Surgen así modelos viscoelásticos, viscoplásticos, modelos no-lineales, que incorporan las nociones de la Teoría de la Plasticidad para la caracterización de leyes de comportamiento más próximas a la realidad; modelos elásto-plásticos extendidos como el modelo de Mohr-Coulomb, modelos desarrollados para la implementación en modelos numéricos como el modelo Hardening-Soil de PLAXIS con endurecimiento por deformación.

Por otro lado, ya mencionado con anterioridad, el carácter poroso del medio se plasma en la formulación de Biot para el medio poroelástico. Esta formulación adquiere mayor complejidad pero permite plasma un comportamiento más realista. Se implementa en los modelos numéricos y proporciona buenos resultados en el estudio de determinados medios como por ejemplo sedimentos, o suelos saturados donde el fluido adquiere un papel protagonista.

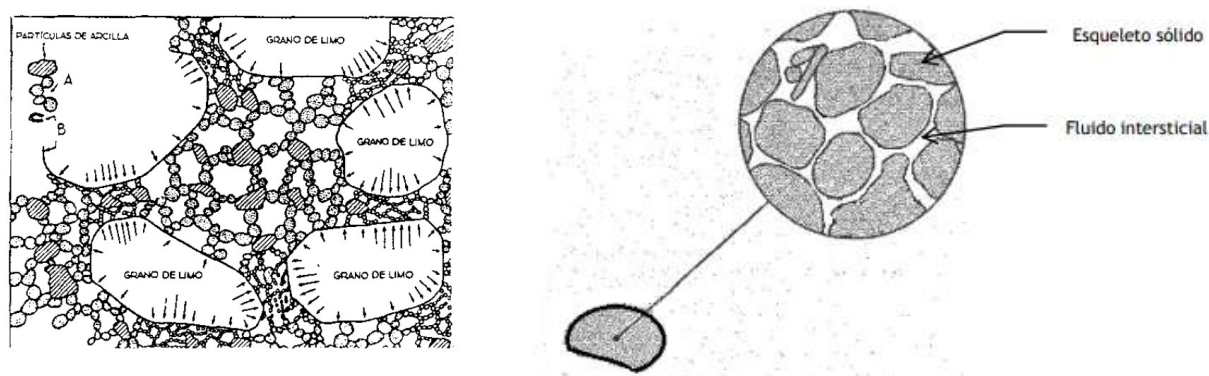


Figura 1.4. A la izquierda la composición del suelo según Casagrande (1940), a la derecha el medio poroelástico de Biot (1956)

Se realizan diferentes ensayos de laboratorio y campo de cara a la caracterización dinámica de los suelos: fenómenos de propagación de ondas, respuesta ante carga repetida, influencia de la velocidad de aplicación de las cargas, etc. Algunos de ellos son los ensayos de pulsos ultrasónicos, ensayos con elementos *bender*, ensayos de columna resonante, ensayo triaxial cíclico, entre otros [18].

Es conveniente, comentado esto, puntualizar que en el presente trabajo se asume un modelo simplificado de medio elástico-lineal, isótropo y homogéneo para el suelo en los modelos que se generen.

1.5. Contenido del trabajo

Una vez realizada la anterior introducción, conviene resumir el contenido presente en el trabajo. Este trabajo pretende aplicar dos de las técnicas mencionadas anteriormente: el *Perfectly Matched Layer* o *capas perfectamente acopladas*, y la formulación de *elementos infinitos* para su aplicación a modelos de elementos finitos mediante el software comercial *ANSYS Mechanical APDL*, dirigidos a problemas relacionados con la interacción suelo-estructura, de cara a evaluar las diferencias obtenidas en las respuestas de dichos modelos con respecto a aquellos modelos MEF que no incorporan estas técnicas, y que presentan los inconvenientes anteriormente mencionados.

Se comienza dedicando un breve capítulo al fenómeno de la propagación de ondas en medios elásticos o elastodinámica. Sin entrar en profundidad se presentan las nociones básicas, que sirven a capítulos posteriores. Esto da paso al método del PML al que se dedica un primer capítulo para plasmar la base teórica del mismo y entender los conceptos básicos de la formulación. Tras ello se aplica dicho método a la resolución de problemas de la interacción suelo-estructura, concretamente a la respuesta dinámica de cimentaciones superficiales.

En el quinto capítulo se recogen ciertos conceptos básicos sobre la generación de los elementos infinitos, para servir de introducción a los capítulos 6 y 7 donde se generan modelos que implementan estos para el análisis de problemas de esta índole. En el capítulo 6 se estudia la influencia del suelo, y así mismo de la disposición de elementos infinitos en los contornos del modelo, en la respuesta a flexión de puentes de ferrocarril. Siendo el capítulo séptimo dedicado a la generación de un modelo sumamente simple para la evaluación de las vibraciones que experimentan estructuras cercanas al paso de cargas (trenes) a alta velocidad, de nuevo observando la influencia del terreno y la disposición de elementos infinitos en los modelos.

Por último en el capítulo octavo se plasman las conclusiones y posibles mejoras, que a su vez se van puntualizando en los capítulos correspondientes.

2 ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS

El presente capítulo tiene por objetivo presentar, de forma breve, los conceptos básicos que gobiernan los fenómenos de propagación de ondas en medios elásticos. La propagación de ondas debido a la relación directa de este fenómeno con el comportamiento de estructuras en su interacción con el suelo como ya se comentaba anteriormente. En medios elásticos porque así serán los modelos de suelos que se presenten más adelante, en el análisis de ciertos problemas estructurales.

Las ideas y razonamientos seguidos en este capítulo pueden encontrarse, en mayor profundidad, en J. Domínguez (1993) [3]

2.1. El problema elastodinámico. Ecuaciones básicas.

La notación empleada será en **negrita** vectores y tensores y el resto escalares. Las ecuaciones se expresan en un sistema cartesiano con ejes dados por x_j $j = 1,2,3$. Se emplea notación indicial.

Se considera un medio sólido elástico, isótropo y homogéneo, definido en un dominio Ω , y con un contorno $\partial\Omega$. Sea el desplazamiento de un punto cualquiera \mathbf{x} del sólido, en un instante t , expresado como $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Las ecuaciones de compatibilidad relacionan este con el tensor de pequeñas deformaciones, $\boldsymbol{\varepsilon}$, en un punto \mathbf{x} y un instante t , según

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad [2.1]$$

Por otro lado, de la conservación de la cantidad de movimiento se obtiene,

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad [2.2]$$

las ecuaciones de equilibrio interno. Donde $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ es el tensor de tensiones, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ son fuerzas por unidad de volumen y masa y $\rho(\mathbf{x})$ es la densidad. La conservación del momento cinético implica la simetría del tensor de tensiones.

Por último, las ecuaciones de comportamiento o ecuaciones constitutivas del material. Para un material elástico-lineal e isótropo, la relación lineal entre tensiones y deformaciones viene dada por:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \quad [2.3]$$

donde E es el módulo de Young, ν el coeficiente de Poisson, constantes elásticas del material y δ_{ij} la delta de Kronecker ($= 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$)

Como es sabido, el comportamiento de un sólido elástico lineal e isótropo queda totalmente definido en base a dos únicas constantes elásticas (dentro de las cinco comúnmente empleadas) independientes, siendo el resto de constantes relacionadas entre sí. De este modo la ecuación [2.3] puede expresarse en función de las constantes de Lamé

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad [2.4]$$

donde λ es la primera constante o parámetro de Lamé y μ es el segundo parámetro de Lamé o módulo de elasticidad transversal (también G)

Pues bien, las anteriores: equilibrio, compatibilidad y comportamiento, forman un sistema de ecuaciones que definen el comportamiento dinámico de sólidos elástico-lineales, homogéneos e isótropos. Sustituyendo [2.1] y [2.4] en la ecuación [2.2], obtenemos unas ecuaciones para el campo de desplazamientos,

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad [2.5]$$

que de forma vectorial quedan,

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad [2.6]$$

estas son las ecuaciones de gobierno del problema elastodinámico en términos de los desplazamientos, o ecuaciones de Navier.

Tanto las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento como así mismo la ecuación de gobierno deben satisfacerse en el dominio Ω . Por otro lado, debemos imponer las condiciones de contorno al problema. Por una parte, el tensor de tensiones deberá satisfacer,

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{en } \partial\Omega_t \quad [2.7]$$

donde \bar{t}_i serán las fuerzas exteriores en cualquier punto de $\partial\Omega_t$ y n_j la normal al plano tangente al contorno en dicho punto. Siendo $\partial\Omega_t$ aquella parte del contorno donde se supongan conocidas las cargas externas, las cuales son igualmente función del tiempo. Mientras que el campo de desplazamientos se supondrá conocido en $\partial\Omega_u$, dándose que

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en } \partial\Omega_u \quad [2.8]$$

con su dependencia temporal correspondiente, siendo $\partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u = \partial\Omega$ y $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_u = \emptyset$.

Tras imponer las condiciones en el contorno, podemos cerrar el problema a expensas de imponer las condiciones iniciales para todo punto contenido en Ω a tiempo inicial $t_o = 0$

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = u_{oi}(\mathbf{x}) \quad [2.9]$$

$$\dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = v_{oi}(\mathbf{x}) \quad [2.10]$$

2.1.1 Dilatación y rotación

Resulta evidente la gran complejidad del problema a la vista de las ecuaciones de gobierno que conforman un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas, función del espacio y el tiempo. Las componentes de los desplazamientos por lo tanto se encuentran acopladas. La dificultad de ello ha impulsado a diversos autores a buscar diferentes formas de desacoplar el sistema y encontrar ecuaciones más sencillas. Se describe con brevedad el procedimiento propuesto por Stokes (1849).

Se definen la dilatación volumétrica y el vector rotación de la siguiente forma

$$\theta = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad [2.11]$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad [2.12]$$

Ahora bien, si tomamos la ecuación de gobierno [2.6] y aplicamos el rotacional y la divergencia, teniendo en cuenta que para campos vectoriales, \mathbf{v} , la divergencia del rotacional es nula, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$, y que $\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$, y para campos escalares, a , el rotacional del gradiente es nulo, $\nabla \times \nabla a = 0$; obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$c_1^2 \nabla^2 \theta + \nabla \cdot \mathbf{b} = \ddot{\theta} \quad [2.13]$$

$$c_2^2 \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{b} = \ddot{\boldsymbol{\omega}} \quad [2.14]$$

Siendo la primera ecuación de carácter escalar, en función de la dilatación y la segunda de ellas vectorial, en función del vector rotación. Las constantes c_1 y c_2 son las velocidades de propagación de las ondas, y vienen dadas por,

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad [2.15]$$

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad [2.16]$$

normalmente denominadas c_p y c_s respectivamente. Esto es dado que, la primera de las ecuaciones representa una onda que se desplaza con velocidad $c_p \equiv c_1$ de naturaleza dilatacional, es decir, es una perturbación asociada a cambios de volumen; mientras que la segunda es una onda que se mueve con velocidad $c_s \equiv c_2$ y que esta asociada a distorsiones o cambios en la forma. Estas son las conocidas ondas P y S, longitudinales y de corte, las cuales se describen de forma muy breve en adelante.

2.2. Ondas armónicas

Es evidente que el problema formulado en el apartado anterior consta de completa generalidad, diferentes perturbaciones con diferente naturaleza podrán cumplir las ecuaciones presentadas para ser solución del problema, en función del medio, las condiciones de contorno y la naturaleza que las provoca. Existen diferentes tipos de ondas en medios sólidos, desde ondas de cuerpo o internas (ondas S y ondas P, por ejemplo), hasta ondas superficiales que se dan en una determinada superficie libre, como las ondas de Rayleigh; ondas que se manifiestan en la interfase entre dos sólidos, como las ondas Love. Tendrán carácter diferente en función de su dependencia espacial (ondas planas, ondas esféricas...) y temporal (ondas armónicas, por ejemplo).

Las ondas de diferente naturaleza exhibirán comportamientos diferentes, y se propagarán en el medio con un carácter que dependerá de esta. No es el objetivo de este apartado profundizar en el tema sino poner de manifiesto un tipo de ondas que conviene conocer. Estas son las ondas armónicas. Son todas aquellas cuyo comportamiento en el tiempo viene gobernado por funciones de tipo sinusoidales: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$, con ω la frecuencia angular; o de forma exponencial compleja: $e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega t}$.

El interés por incluir un hueco para hablar este tipo de ondas se debe a que, en primer lugar, esto servirá de base a capítulos posteriores, los cuales se basan en este tipo de onda; y por otro lado, la utilidad que estas presentan dado que cualquier otra perturbación puede, empleando el principio de superposición bajo técnicas como las series de Fourier, representarse como una suma de ondas armónicas. Esto es muy empleado en diversos campos de la ingeniería y la ciencia.

De forma general, para el caso unidimensional, el campo de desplazamientos solución del problema, cuando la perturbación es del tipo

$$F(t) = F e^{i\omega t} \quad [2.17]$$

vendrá dado por

$$u_1(x_1, t) = A e^{\frac{i\omega}{c}(ct-x)} + B e^{\frac{i\omega}{c}(ct+x)} \quad [2.18]$$

donde A y B son amplitudes, $e^{\frac{i\omega}{c}(ct-x)}$ representa una onda propagándose en dirección positiva de x , y $e^{\frac{i\omega}{c}(ct+x)}$ en dirección negativa; c es la velocidad de propagación de onda, ω la frecuencia. La perturbación con carácter armónico se caracteriza por un periodo $T = 2\pi/\omega$ y una longitud de onda $\lambda = c \left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = cT$. Se define el número de onda como $k = \frac{\omega}{c} = 2\pi/\lambda$, que representa el número de longitudes de onda en una longitud de 2π .

Por otro lado, es interesante describir las ondas armónicas planas. Previo a ello, cabe definir el concepto de onda plana. Una onda plana es una perturbación definida por una dirección de propagación \mathbf{q} , donde todos los puntos contenidos en el plano perpendicular a dicha dirección se mueven de idéntica forma. El desplazamiento adquiere una forma general del tipo:

$$\mathbf{u} = f\left(t - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) \mathbf{d} \quad [2.19]$$

Donde \mathbf{q} es el vector unitario en dirección de propagación, \mathbf{d} es el vector unitario en dirección del movimiento de los puntos contenidos en el plano perpendicular a la dirección de propagación, \mathbf{x} es el vector de posición y c es la velocidad de propagación de la onda.

Ahora bien, esta forma general puede particularizarse para el caso de onda armónica donde tomará la forma:

$$\mathbf{u} = e^{i(\omega t - k\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad [2.20]$$

suponiendo una amplitud unidad, con $k=\omega/c$ el número de onda.

2.3. Propagación de ondas en los medios elásticos

Se pretende, de forma muy breve, poner de manifiesto algunos conceptos sobre la propagación de las ondas. Esto se hará en base a particularizaciones del campo de desplazamientos: se supone una onda plana y armónica de la forma [2.20]

Si tomamos las velocidades de propagación de ondas S y P dadas por [2.15] y [2.16] y escribimos la ecuación de gobierno en términos de el vector rotación y la dilatación nos queda:

$$-c_s^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} + c_p^2 \nabla \theta = \ddot{\mathbf{u}} \quad [2.21]$$

Si ahora suponemos un vector de desplazamientos dado por [2.20], de acuerdo a una onda armónica plana, la ecuación [2.21] queda de la forma:

$$(c_s^2 - c^2) \mathbf{d} + (c_p^2 - c_s^2) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{q} = 0 \quad [2.22]$$

Esta última expresión nos permite razonar sobre la propagación de estas ondas. Si la velocidad de la onda considerada, c , toma valor de la velocidad de ondas P, c_p , entonces [2.22] se cumple sí y solo sí $\mathbf{q} = \pm \mathbf{d}$. Esto quiere decir que el vector en dirección de la propagación ha de ser paralelo al vector que indica el desplazamiento de los puntos contenidos en el plano perpendicular a la propagación, o lo que es lo mismo, que la onda P sea una perturbación longitudinal, experimentando todos los puntos un

movimiento en dirección de la propagación.

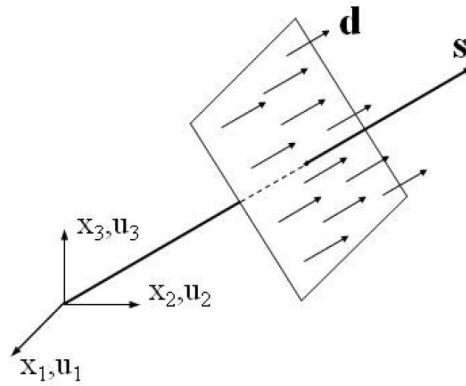


Figura 2.1. Propagación y desplazamiento de los puntos en una onda de tipo P: s equivale a q en la notación empleada.

Por otro lado, si c toma el valor de la velocidad de onda S, c_s , entonces la expresión [2.22] se cumplirá sí y solo sí el producto escalar del vector propagación y desplazamiento es nulo, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{d} = 0$, es decir, que estos sean ortogonales. Esto implica que la onda S es una perturbación donde los puntos contenidos en el plano perpendicular a la propagación experimentan desplazamientos contenidos en dicho plano.

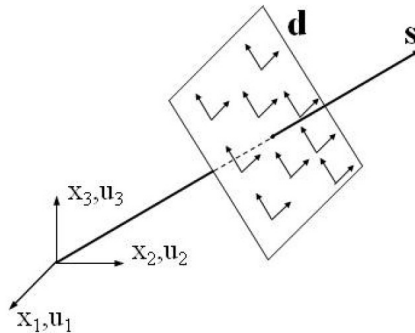


Figura 2.2. Propagación y desplazamiento de los puntos en una onda de tipo S: s equivale a q en la notación empleada.

Las ondas P y S convivirán en el medio infinito, siendo la velocidad de las ondas P superior a la de las ondas S, conocidas de este modo como primarias y secundarias respectivamente, y con las propiedades descritas con anterioridad.

Si bien las anteriores corresponden a ondas volumétricas o de cuerpo (dado que se propagan en el interior del medio) se debe destacar la existencia de otras tipologías de ondas las cuales se propagan en las superficies, estas son las ondas de Rayleigh y las ondas Love. Ambas superficiales, presentan propiedades diferentes.

Las ondas de Rayleigh aparecen en la superficie libre del medio (superficie del terreno), provocando que las partículas se muevan describiendo trayectorias elípticas verticales retrógradas en el sentido de la propagación de la onda. Esto produce un movimiento ondulatorio similar al observado en la superficie del mar. Su velocidad de propagación se presenta menor que la de ondas S, P e incluso ondas Love.

Por otro lado, las ondas Love, son igualmente ondas de superficie que se manifiestan en la interfase de capas de diferentes propiedades: habitualmente cuando una capa de material con baja velocidad de propagación se superpone a otras cuya velocidad de propagación es alta. Estas ondas provocan en las partículas movimientos horizontales y perpendiculares a la dirección de propagación. Suelen ser el producto de la interferencia de numerosas ondas tipo S. Las ondas de superficie en tienden a atenuarse más rápidamente que las ondas de cuerpo.

3 ENFOQUE DEL PROBLEMA MEDIANTE EL PERFECTLY MATCHED LAYER

Se trata de abordar el problema de la interacción suelo-estructura mediante el método conocido como Perfectly Matched Layer (PML), el cual se presenta a continuación y que, desde el punto de vista de los modelos numéricos, representa una herramienta de utilidad de cara a obtener buenos resultados en el intento de resolver problemas asociados a las condiciones de contorno en modelos de medios semiinfinitos.

En lo que sigue se pretende plasmar la idea básica tras el uso de esta herramienta en los modelos de cálculo y qué permite mejorar en los mismos. Además de esto se desarrolla la base teórica del método, mediante un ejemplo a modo de ilustración del concepto; para luego tratar su implementación en los modelos numéricos.

La formulación aquí expuesta es propuesta por U. Basu y A.K. Chopra en [4], para la resolución de problemas relacionados con la propagación de ondas en medios elásticos. Concretamente se asume una dependencia temporal armónica, y se establece el análisis en el dominio de la frecuencia. Así mismo implementa esta formulación en el Método de los Elementos Finitos el software ANSYS con el cual se resolverán algunos problemas relacionados con la interacción suelo-estructura en capítulos posteriores.

3.1 Idea básica del método

Como se ha introducido, una estructura solicitada por determinadas cargas móviles se convierte en una fuente de vibraciones que se transmiten por el terreno en el que esta se cimenta. Esta propagación de ondas es un mecanismo de disipación de energía y tendrá implicaciones claras en el comportamiento dinámico de la estructura. Se trata por lo tanto de plasmar dicha propagación de ondas a través del terreno en nuestro modelo.

El carácter infinito de este medio hace necesario truncar el modelo a una determinada distancia, y la clave aquí es: cómo lograr dicho truncamiento, que genera una frontera no real, de forma que no se produzcan reflexiones de ondas en el modelo que afectan a los resultados.

Existen diversos problemas cuyas soluciones decaen rápidamente con la distancia, por lo que truncar los modelos no resulta un problema demasiado relevante. Sin embargo, los problemas que involucran ecuaciones de onda se presentan más sensibles a esto. Este decremento lento de la solución implica que imponer condiciones de borde o frontera del tipo Dirichlet o Neumann (es decir, imponer la condición matemática de valor nulo al campo solución o a su derivada) puede ocasionar la reflexión de ondas en el modelo, sin plasmar bien el comportamiento real.

Surge la idea por tanto de poder representar matemáticamente condiciones de borde absorbentes (ABCs). El objetivo que se persigue es lograr que, la onda que llega al contorno del modelo, no perciba la existencia este borde y actúe como si pudiera continuar propagándose, sin dejar ningún tipo de reflexión. Esto que se presenta más sencillo en el caso unidimensional, se complica algo para el caso bidimensional y tridimensional, donde las direcciones de posible reflexión se presentan infinitas, y existen una dependencia de la misma con el ángulo de incidencia de la onda en el borde.

Este concepto de condición de borde o frontera absorbente (ABCs) es modificado por Berenger [45], quién, partiendo del mismo concepto, enfoca el problema de diferente forma: en lugar de buscar una condición absorbente, busca colocar en el modelo una capa absorbente. Dicha capa se presenta como una capa de *material artificial* que se dispone de forma adyacente al modelo en su contorno. La idea perseguida es que cuando la onda atraviesa la interfase entre el modelo y la capa absorbente, esta es atenuada rápidamente (de forma exponencial) en dicha capa, de forma que al llegar al borde de esta (donde se impondrán las condiciones de contorno) no genere reflexiones, o sean tan pequeñas que no afecten de forma significativa a los resultados.

Surgía un nuevo problema y es que, al disponer dos materiales diferentes (el material no absorbente que modela en terreno y el material que forma la capa absorbente) en la interfase entre ambos la onda generaría reflexiones al cruzar la misma. Esto implicaba que el problema se había trasladado del contorno del modelo a la interfase con la capa absorbente. Sin embargo, Berenger demostró que la formulación de un determinado medio absorbente (*Perfectly Matched Medium* o PMM) lograba que la onda cruzara la interfase sin dejar reflexiones. Nace así el método del *Perfectly Matched Layer* (PML) o método de las *capas perfectamente acopladas*.

De modo que podemos entender el PML como un método que logra simular de forma matemática medios infinitos, a partir de modelos finitos con un coste computacional aceptable. El concepto del PML nace de cara al tratamiento de problemas electromagnéticos, para las ecuaciones de Maxwell y tras ello ha sido reformulado para la resolución de otras ecuaciones de onda tales como: la ecuación de Helmholtz, las ecuaciones de onda en medios poroelásticos y las ecuaciones de onda elastodinámicas, entre otras. Son estas últimas en las que nos vamos a apoyar en este trabajo: ecuaciones de ondas armónicas en medios elásticos. En lo que sigue se pretende poner de manifiesto el desarrollo teórico que hay detrás de este método y que logra los objetivos comentados anteriormente, y su implementación en modelos numéricos.

3.2 Formulación para el caso unidimensional.

En la presente sección se intenta plasmar el desarrollo teórico que hay detrás de la idea expuesta anteriormente. Dicho desarrollo se hará para el caso unidimensional, con el objetivo de mostrar, de forma analítica, cómo se comporta el Perfectly Matched Layer. Se considera que de esta forma se obtienen las ideas claves del método, siendo estas la base para la aplicación a problemas bi y tridimensionales. El desarrollo que sigue en el presente apartado se establece en el dominio de la frecuencia. Esto se debe a dos motivos: el primero relacionado con la completa interpretación de las ecuaciones de cara a poner de manifiesto de forma precisa las ideas básicas del método, algo que se simplifica en el dominio de la frecuencia; y el segundo motivo, que será el análisis armónico el empleado en la resolución de ciertos problemas aplicados en los capítulos venideros.

3.2.1. Formulación en el medio elástico semi-infinito

Se considera el sistema unidimensional formado por la barra semi-infinita sobre una cimentación elástica de la Figura 3.1, supuesta lo suficientemente delgada como para despreciar los desplazamientos y tensiones contenidos en el plano perpendicular a la directriz, y analizar el comportamiento en base a los desplazamientos según esta; la cual no está solicitada por ninguna fuerza externa, y con las siguientes condiciones de contorno:



Figura 3.1. Barra teórica semi-infinita.

- Un desplazamiento armónico impuesto en su extremo inicial ($x=0$) dado por

$$u_o \exp(i\omega t) \quad [3.1]$$

Con u_o la amplitud del movimiento y ω la frecuencia de excitación

- Condición de radiación con $x \rightarrow \infty$. Sólo existirán ondas propagándose en dirección positiva de x .

El desplazamiento armónico impuesto en su extremo inicial provocará que los puntos de la barra a lo largo de la misma experimenten un desplazamiento armónico igualmente, dado por:

$$u(x, t) = u(x) \exp(i\omega t) \quad [3.2]$$

donde $u(x)$ es una función que responde a los desplazamientos según la directriz de la barra a una distancia x del extremo inicial para un instante de tiempo t , y $\exp(i\omega t)$ dará su variabilidad temporal.

Buscamos así las ecuaciones de gobierno del problema, tomando una sección diferencial dx , imponemos el equilibrio del subdominio: equilibrio entre las fuerzas elásticas, inerciales, de amortiguamiento y las fuerzas externas, que aparecen en la sección debido a la tensión que se genera al excitar el extremo inicial de la barra, y que es la acción que el resto del dominio ejerce sobre el subdominio aislado. La ecuación de equilibrio queda:

$$k_g u dx + m \ddot{u} dx + c \dot{u} = \left(-\sigma + \sigma + \frac{d\sigma}{dx} dx \right) A \quad [3.3]$$

donde: k_g , es la rigidez estática de la cimentación por unidad de longitud, c es el amortiguamiento de la barra, m es la masa por unidad de longitud de la barra y A es el área de la barra.

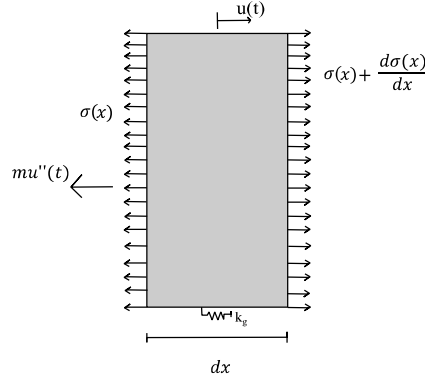


Figura 3.2. Equilibrio en la sección diferencial.

Ensayando para el desplazamiento en todo punto de la barra solución del tipo [3.2], despreciando el amortiguamiento y teniendo en cuenta que:

$$\ddot{u} = -\omega^2 u \quad [3.4]$$

quedaría

$$k_g u \, dx + m(-\omega^2 u) \, dx = \frac{d\sigma}{dx} A \, dx \quad [3.5]$$

Ahora teniendo en cuenta que $m = \rho A$, con ρ la densidad de la barra, la ecuación [3.5] toma la forma

$$\frac{d\sigma}{dx} - \frac{k_g}{A} u = -\omega^2 \rho u \quad [3.6]$$

siendo la ecuación [3.6] la ecuación de equilibrio del subdominio. Por otro lado, deben satisfacerse la compatibilidad y la ley constitutiva del material, de modo que se tiene

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad [3.7]$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad [3.8]$$

donde E es el módulo de elasticidad longitudinal del material de la barra.

Si ahora introducimos [3.8] en [3.7], y derivamos respecto de x

$$\frac{d\sigma}{dx} = E \frac{d^2 u}{dx^2} \quad [3.9]$$

Introduciendo [3.9] en [3.6], y reordenando se tiene

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\frac{\omega^2 \rho}{E} - \frac{k_g}{EA} \right] u = 0 \quad [3.10]$$

Ahora bien, definimos los siguientes parámetros con los que vamos a tratar a partir de aquí

$$r_o^2 = \frac{EA}{k_g} \quad [3.11]$$

$$a_o = \frac{\omega r_o}{c_1} \quad [3.12]$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad [3.13]$$

siendo r_o un parámetro con unidades de longitud, que si observamos, es la relación entre la rigidez axil de la barra y la rigidez por unidad de longitud en dirección longitudinal de la cimentación; a_o es una frecuencia adimensional, y c_1 se conoce como la velocidad de propagación de la onda en la barra.

Sustituyendo dichos parámetros en [3.10] obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\frac{a_o^2 - 1}{r_o^2} \right] u = 0 \quad [3.14]$$

O lo que es equivalente:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + Bu = 0 \quad \text{con } B = \frac{a_o^2 - 1}{r_o^2}$$

Nótese que la ecuación [3.14] es función de la frecuencia, asumiendo [3.2] y [3.4]. De modo que $u = u(x, \omega)$, en lo que sigue se denotará como u .

La ecuación [3.14] se trata de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, cuyas soluciones dependerán del signo que adquiera la constante B, y así mismo del valor del parámetro a_o , lo que se analiza a continuación.

Si la constante B adquiere un valor negativo, es decir, para $a_o < 1$, se encuentran soluciones del tipo:

$$u(x) = \exp\left(-\sqrt{1 - a_o^2} \frac{x}{r_o}\right) \quad [3.15]$$

para la onda evanescente que viaja hacia la derecha en la barra y,

$$u(x) = \exp\left(+\sqrt{1 - a_o^2} \frac{x}{r_o}\right) \quad [3.16]$$

para la onda evanescente que viaja hacia la izquierda en la barra. Las ondas con este carácter se atenúan rápidamente, de forma exponencial.

Mientras que si B adquiere un valor positivo, es decir, para $a_o > 1$, las soluciones serán:

$$u(x) = \exp\left(-i\sqrt{a_o^2 - 1} \frac{x}{r_o}\right) \quad [3.17]$$

para la onda que se propaga hacia la derecha en la barra y,

$$u(x) = \exp\left(+i\sqrt{a_o^2 - 1} \frac{x}{r_o}\right) \quad [3.18]$$

para la onda que se propaga hacia la izquierda en la barra.

La condición impuesta al problema, de radiación, hará que solo haya ondas propagándose hacia la derecha.

Para $a_o = 1$, la frecuencia de corte

De modo que las ecuaciones [3.15] a [3.18] representan las ecuaciones de ondas elásticas que se propagan en la barra.

La bibliografía [1] elige un parámetro o propiedad en concreto para analizar el efecto que tendrá la implantación de la PML en el problema, y este es: la rigidez dinámica de la barra evaluada en su extremo inicial, $x = 0$. Cabe definir esta dado que se empleará en apartados posteriores para analizar la precisión que se alcanza con el uso de PML en la absorción y atenuación de ondas. Se define la rigidez dinámica de la barra en su extremo inicial como la fuerza necesaria para mantener un desplazamiento unidad en dicho extremo (que recordamos está sometido a un desplazamiento armónico dado por (1)), esto es $u_0 = 1$. La fuerza necesaria para lograr esto será la integración de la tensión que aparece en dicho extremo de la barra en todo el área de la barra. Dado que el problema es unidimensional se admite una tensión constante en dicha área de modo que la rigidez dinámica, S

$$S = -\sigma(x = 0)A \quad [3.19]$$

Tomando las ecuaciones [3.7] y [3.8],

$$-\sigma(x = 0)A = EA \frac{du}{dx}(x = 0) \quad [3.20]$$

Y teniendo en cuenta [3.15] y [3.16]

$$\frac{du}{dx}(x = 0) = \pm \sqrt{1 - a_o^2} \frac{1}{r_o} \quad [3.21]$$

como

$$r_o^2 = \frac{EA}{k_g}$$

$$-\sigma(0)A = \pm \frac{EA}{r_o} \sqrt{1 - a_o^2} = \pm EA k_g \sqrt{1 - a_o^2} \quad [3.22]$$

Se tiene que la rigidez dinámica en $x=0$ será

$$S^\infty(a_o) = (K^\infty)^2 \sqrt{1 - a_o^2} \quad [3.23]$$

Se define $K^\infty = \sqrt{EA k_g}$ como el coeficiente de rigidez estático del sistema donde vemos que aparece tanto la rigidez de la barra como la de la cimentación; y la rigidez dinámica adimensional, cuando $K^\infty = 1$ como:

$$\bar{S}^\infty(a_o) = \sqrt{1 - a_o^2} \quad [3.24]$$

Este último parámetro será el que emplearemos a la hora de estudiar la influencia del PML en el sistema que venimos utilizando como ejemplo.

3.2.2. Definición Del Perfectly Matched Medium (PMM)

Una vez obtenidas las ecuaciones para las ondas que se propagan en el medio elástico, debemos introducir el concepto del *Perfectly Matched Medium*. Es esta la base del funcionamiento de las capas perfectamanete acopladas (PML): estas se basan en las propiedades fundamentales del PMM.

Supongáse el mismo dominio descrito en el apartado anterior, donde las ecuaciones de gobierno son conocidas e idénticas al caso anterior [3.6], [3.7] y [3.8], pero téngase en cuenta la redefinición de la coordenada dada por:

$$\tilde{x} = \int_0^x \lambda(s) ds \quad [3.25]$$

donde $\lambda(x)$ se trata de una función no-nula, continua y compleja. A priori parece carecer de sentido

dicho cambio, pero más adelante se pondrá de manifiesto la implicación de este en las ecuaciones del PMM.

Dada la continuidad de la función $\lambda(x)$ se tiene:

$$\frac{d\tilde{x}}{dx} = \lambda(x) \quad [3.26]$$

y así mismo,

$$\frac{d}{d\tilde{x}} = \frac{1}{\lambda(x)} \frac{d}{dx} \quad [3.27]$$

Si ahora introducimos [3.27] en las ecuaciones de gobierno [3.6] a [3.8], obtenemos las siguientes,

$$\frac{1}{\lambda(x)} \frac{d\sigma}{dx} - \frac{k_g}{A} u = -\omega^2 \rho u \quad [3.28]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\lambda(x)} \frac{du}{dx} \quad [3.29]$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad [3.30]$$

De modo que, un PMM será aquel medio donde el campo de desplazamientos está gobernado por las ecuaciones [3.28] a [3.30]. Observando las ecuaciones anteriores debemos puntualizar que [3.28] y [3.29], se presentan diferentes a las ecuaciones en el medio elástico, siendo la [3.30] idéntica. La diferencia reside en la presencia de la función $\lambda(x)$. Una consideración fundamental a hacer y que aparecerá más adelante, es que como se puede apreciar, el medio elástico es una particularización del *Perfectly Matched Medium*, para una función $\lambda(x) = 1$ en todo el dominio.

Ahora bien, al igual que en el apartado anterior, buscamos las soluciones de las ecuaciones de gobierno, que operando de forma similar encontramos las siguientes para el PMM.

Para $a_o < 1$,

$$u(x) = \exp\left(-\sqrt{1 - a_o^2} \frac{\tilde{x}}{r_o}\right) \quad [3.31]$$

para la onda evanescente que se propaga hacia la derecha en la barra y,

$$u(x) = \exp\left(+\sqrt{1 - a_o^2} \frac{\tilde{x}}{r_o}\right) \quad [3.32]$$

para la onda evanescente que se propaga hacia la izquierda en la barra.

Para $a_o > 1$,

$$u(x) = \exp\left(-i\sqrt{a_o^2 - 1}\frac{\tilde{x}}{r_o}\right) \quad [3.33]$$

para la onda que se propaga hacia la derecha en la barra y,

$$u(x) = \exp\left(+i\sqrt{a_o^2 - 1}\frac{\tilde{x}}{r_o}\right) \quad [3.34]$$

para la onda que se propaga hacia la izquierda.

Si observamos las soluciones son idénticas a las del medio elástico con la salvedad de donde se tenía x ahora se tiene \tilde{x} .

Una vez presentada la idea del PMM, destacar las propiedades fundamentales de este, las cuales son las bases del método para generar el PML.

- En primer lugar, se tiene que, dos medios PMM: Ω_{pmm}^1 y Ω_{pmm}^2 , semi-infinitos, adyacentes en un conjunto de puntos Γ , con diferentes funciones $\lambda(x)_1$, y $\lambda(x)_2$, tal que $\lambda(x)_1$ queda definida en todo el dominio Ω_{pmm}^1 y $\lambda(x)_2$ en el dominio Ω_{pmm}^2 , y que además se cumpla que:

$$\lambda(x)_1 = \lambda(x)_2, \quad \forall x \in \Gamma$$

es decir, que presenten el mismo valor en los puntos de la interfase entre ambos, permiten el paso de una determinada onda de un medio a otro a través de la interfase sin generar ondas reflejadas. Esto es conocido como *Perfect Matching Property* (o propiedad de combinación perfecta). Podemos hacernos la idea de que esta propiedad es fundamental en la generación de capas PML. Además dicha propiedad se cumple para [3.31] a [3.34] siendo independiente del tipo de onda, de la dirección de propagación y de la frecuencia, a_o .

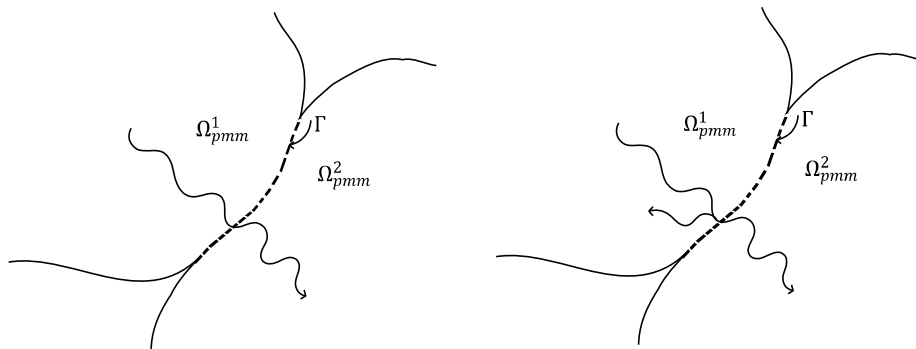


Figura 3.3. Ilustración sobre la propiedad de combinación perfecta

- Otra de las propiedades que presenta el PMM, igual de fundamental que la anteriormente expuesta, tiene que ver con la función $\lambda(x)$.¹ Hasta el momento se ha presentado como una función genérica, pero resulta que, si se elige convenientemente, las soluciones que se obtienen para el PMM adquieren la misma forma que las soluciones para el medio elástico, pero presentan una atenuación espacial adicional. Esto es, aparecen multiplicadas por una exponencial negativa que las atenúa rápidamente con x . Era esto lo que buscábamos para lograr esa absorción de las ondas en los contornos del modelo numérico.

Nos centramos en esta última propiedad. De cara a mostrar esta, de [4] tomamos la función $\lambda(x)$ de la siguiente forma, para $a_0 > 1$:

$$\lambda(x) = 1 - i \frac{f(x)}{\sqrt{a_0^2 - 1}} \quad [3.35]$$

La cual queda definida en términos de $f(x)$, una función continua y real en todo el dominio.

Teniendo en cuenta [3.25]:

$$\tilde{x} = \int_0^x 1 - i \frac{f(s)}{\sqrt{a_0^2 - 1}} ds \quad [3.36]$$

Dividiendo por r_0 :

$$\frac{\tilde{x}}{r_0} = \int_0^x \frac{1}{r_0} ds - i \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - 1}} \int_0^x \frac{f(s)}{r_0} ds \quad [3.37]$$

Si definimos $\bar{F}(s)$ como la integral de $f(s)$,

$$\frac{\tilde{x}}{r_0} = \frac{x}{r_0} - i \frac{\bar{F}\left(\frac{x}{r_0}\right)}{\sqrt{a_0^2 - 1}} \quad [3.38]$$

De forma genérica se define:

$$\bar{F}(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} \bar{f}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad [3.39]$$

donde $\bar{\xi} = \frac{\xi}{r_0}$, y $\bar{f}(\bar{\xi}) = f(r_0 \bar{\xi}) = f(\xi)$

Si ahora tomamos la ecuación [3.38] y la introducimos en [3.33], se obtiene la siguiente expresión:

¹ La elección de la función $\lambda(x)$ es en sí un tema de estudio, y existe un gran abanico de posibilidades a la hora de tomar esta. Es de gran importancia dado que es la función que controla el comportamiento del PML. Algo más se profundizará mas adelante, pero solo se estudiarán funciones de la forma dada por (34) propuestas en [4].

$$u(x) = \exp\left(-\bar{F}\left(\frac{x}{r_o}\right)\right) \exp\left(-i\sqrt{a_o^2 - 1}\frac{x}{r_o}\right) \quad [3.40]$$

que como se puede apreciar es exactamente la misma solución para la onda que viaja hacia la derecha en el medio elástico [3.17] pero aquí multiplicada por una exponencial negativa de la función $\bar{F}\left(\frac{x}{r_o}\right)$.

Entonces podemos concluir que, si la función \bar{F} es positiva en todo el PMM, la onda se atenuará en la dirección x . Además con esta atenuación independiente de la frecuencia a_o , debido a la elección de la función $\lambda(x)$ que se ha realizado. La función $f(x)$ es denominada *función de atenuación*, y hasta el momento no se ha hecho ninguna consideración sobre esta, salvo que su integral sea positiva para todo x en el PMM. Parece obvio que la elección de esta función será determinante a la hora de implementar numéricamente el método del PML. Este aspecto se discutirá más adelante.

Por otro lado, para el caso en que el parámetro $a_o < 1$, se propone una función $\lambda(x)$ similar a la anterior:

$$\lambda(x) = 1 + \frac{f(x)}{\sqrt{1 - a_o^2}} \quad [3.41]$$

obteniéndose de nuevo la misma solución que para el medio elástico, con la atenuación adicional.

3.2.3. Generación del Perfectly Matched Layer (PML)

Una vez entendido como funciona el PMM y que propiedades fundamentales presenta, estamos en disposición de definir el concepto del *Perfectly Matched Layer* o *capa perfectamente combinada*, que no es más que darle forma de capa, adecuadamente, al PMM.

Considérese un determinado dominio finito, acotado en sus bordes, al que se acopla un medio del tipo PMM, el cual es infinito, en forma de capa adyacente al anterior. De este modo el dominio finito junto con el PMM modelizan un medio infinito o semi-infinito. Esta capa de PMM es la que denominaremos PML. Para continuar con el ejemplo que venimos desarrollando, consideramos estos dominios en forma de barra, tal como se observa en la Figura 3.4.

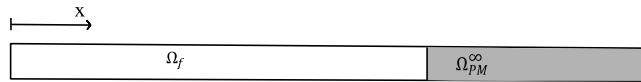


Figura 3.4. Barra semi-infinita compuesta por tramo elástico y tramo PMM

Por un lado tenemos el medio elástico y finito, $\Omega_f \in [0, L]$ el cual se rige por las ecuaciones [3.6], [3.7] y [3.8], y del cual conocemos las expresiones de las ondas que se producen; y por otro lado el medio PMM en forma de capa, a priori de longitud infinita, $\Omega_{PM}^\infty \in (L, \infty)$, el cual se rige por las ecuaciones [3.28], [3.29] y [3.30], y del cual también conocemos las expresiones de las ondas que en él

se propagan. La cuestión es la siguiente: dado que, como se ha expuesto, el medio elástico es un caso particular del PMM donde $\lambda(x) = 1$ en todo el dominio, si definimos una función $\lambda(x)$ en cada uno de los dominios de la forma:

$$\lambda_f(x) = 1, \quad x \in [0, L] \quad [3.42]$$

$$\lambda_{PM}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{f(x-L)}{\sqrt{1-a_o^2}}, & a_o < 1 \\ 1 - \frac{f(x-L)}{\sqrt{a_o^2-1}}, & a_o > 1 \end{cases}, \quad x \in (L, \infty) \quad [3.43]$$

si además definimos la función de atenuación $f(x)$ tal que $f(L) = 0$, es decir, que en $x=L$, la interfaz entre ambos medios, sea nula y así mismo la función $\lambda_{PM}(L) = 1$, compatibilizando ambas funciones de los dos medios en la interfaz, $\lambda_f(L) = \lambda_{PM}(L)$, logramos que toda onda que se propaga fuera del medio finito Ω_f sea absorbida por el medio Ω_{PM}^∞ (sin generar reflexiones en la interfase, *Perfect Matching Property*) y además es atenuada en dicho medio conforme esta se propaga en esa dirección. Dado esto, surge la siguiente cuestión: si la onda que atraviesa la interfase se atenúa lo suficiente en una distancia finita en el medio Ω_{PM}^∞ , podemos truncar dicho medio a dicha distancia y hacerlo finito, logrando que la onda se atenúe antes de llegar al final de este y evitando así las reflexiones. Esta distancia será el espesor del PML, llamémoslo L_p , y será un parámetro fundamental en la generación de los modelos numéricos de cara a obtener buenos resultados, surgiendo así el concepto de PML.

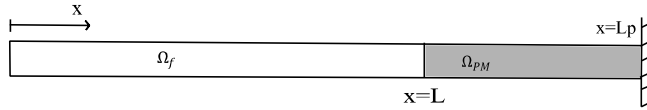


Figura 3.5. Barra finita compuesta por tramo elástico y tramo con propiedades PMM.

De modo que, truncando el PMM a una distancia L_p , obtenemos el modelo que se observa en la Figura 3.5. Se tendría así el medio finito de carácter elástico, $\Omega_f \in [0, L]$; y el PMM ahora en forma de capa finita, PML, $\Omega_{PM} \in (L, L + L_p]$. Dado que la onda al llegar al final del PML se ha atenuado lo suficiente como para producir reflexiones nulas o insignificantes, un punto P contenido en Ω_f en la barra semi-infinita ($\Omega_{sf} := (\Omega_f \cup \Omega_{PM}^\infty)$) experimenta el mismo desplazamiento (o con un grado de proximidad suficiente) que el mismo punto P^* contenido en Ω_f en la barra finita ($\Omega_F := (\Omega_f \cup \Omega_{PM})$)

En conclusión, hemos logrado modelar un medio semi-infinito mediante un modelo acotado, disponiendo estas capas que sabemos cómo funcionan, y que evitan la reflexión de las ondas que intervienen en los cálculos, tal y como perseguíamos.

De cara a clarificar los conceptos expuestos hasta este punto, se considera una barra de 5 metros de longitud, con una capa PML de 1 metro de longitud en su extremo. Es decir, se definen el medio elástico tal que $\Omega_f \in [0, 5]$, y el medio PMM $\Omega_{PM} \in (5, 5 + 1]$. La función $\lambda(x)$ se define de acuerdo a [3.42] y [3.43] donde $L=5$ metros y la función de atenuación se elige de la siguiente forma, como se propone en [1],

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5 \\ f_o \left(\frac{x}{L_p} \right)^m, & 5 < x \leq 6 \end{cases} \quad [3.44]$$

donde L_p es la profundidad de la capa PML. La función se ha tomado como un polinomio de grado m , afectado por el coeficiente f_o . Es decir, este alcanzará el valor máximo en el extremo final del PML y presentará un crecimiento dado por m y f_o . La elección de los parámetros L_p , m y f_o se discutirá en el siguiente apartado, pero cabe plasmar aquí de forma simplificada cómo se comporta la onda en el PML en función de la elección de f_o y m .

En la Figura 3.6 podemos observar como la oscilación se ve reducida conforme f_o crece, y por otro lado, como la oscilación se ve amplificada cuando el grado de la función, m , adquiere mayores valores, Figura 3.7.

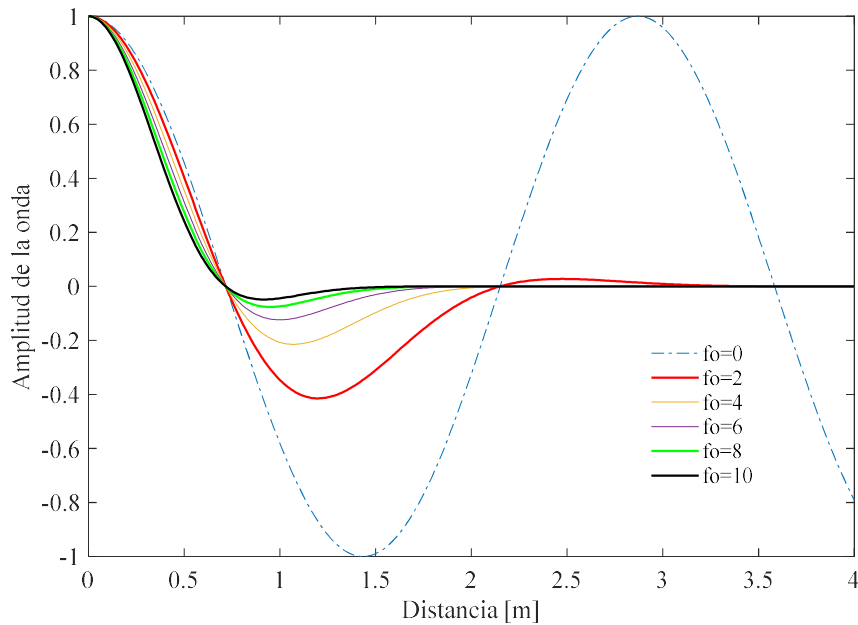


Figura 3.6. Comportamiento de la oscilación en función del valor que toma f_o .

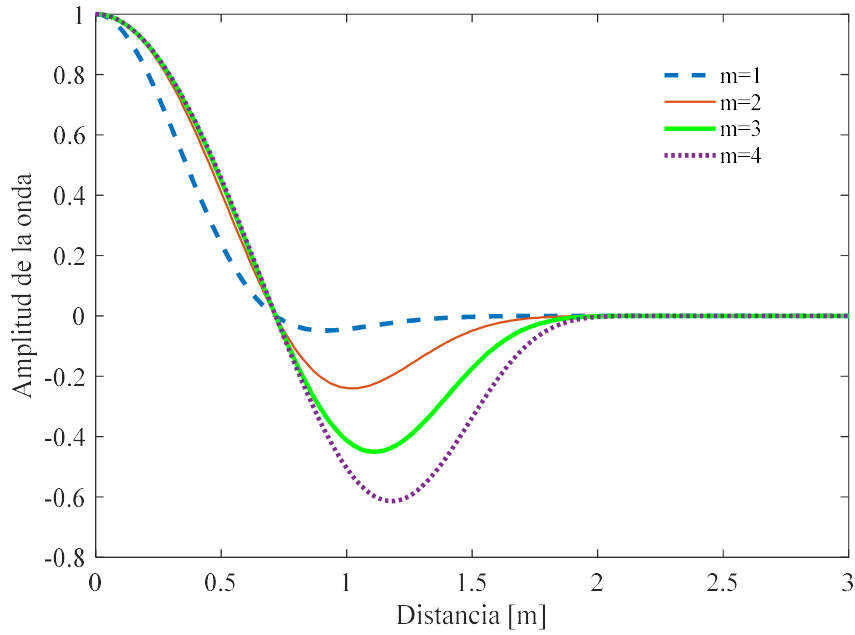


Figura 3.7. Comportamiento de la oscilación de acuerdo al valor del coeficiente m

Esto impulsa a tomar la función de atenuación como un polinomio de primer grado, y el factor f_0 suficientemente elevado para lograr la atenuación necesaria en la profundidad L_p determinada. Para este ejemplo se ha tomado una función lineal, con $f_0 = 10$, y una profundidad para el PML de un metro como se ha indicado anteriormente.

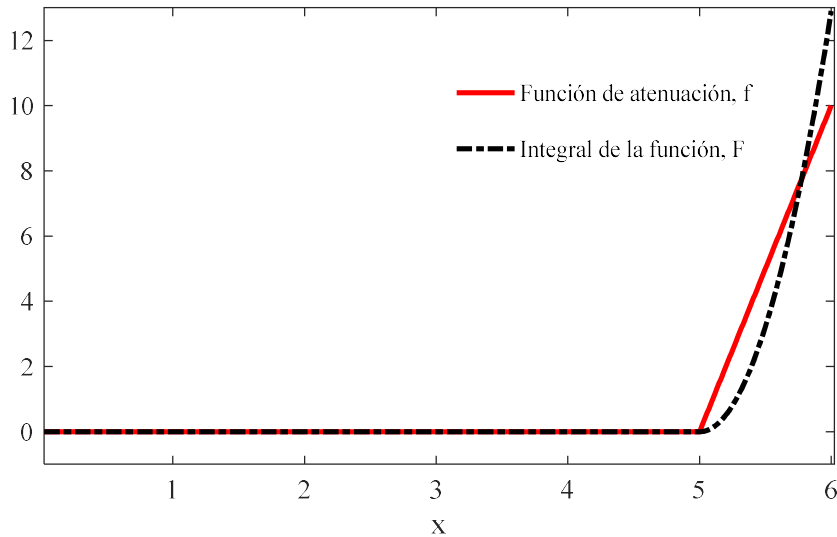


Figura 3.8. Función de atenuación y su integral a lo largo de la barra.

Se observa la evolución lineal para dicha función, siendo nula en todo el dominio Ω_f y tomando valores a partir de la interfase, hasta alcanzar un valor máximo en el final del PML. Además, podemos observar la integral de la función, definida de acuerdo a [3.39].

Pues bien, aplicando el concepto teórico que se viene analizando, y para estos valores de los parámetros se obtiene el siguiente comportamiento para la onda que se excita en su extremo inicial, con amplitud unidad y se propaga hacia la derecha

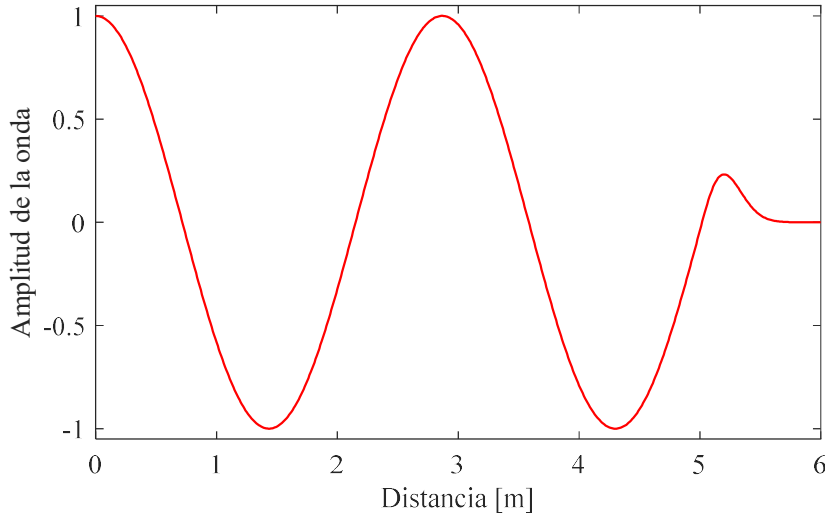


Figura 3.9. Comportamiento de la onda a lo largo de la barra.

Vemos como al llegar a la interfaz entre el medio elástico y el PMM ($x = 5$) la onda continúa propagándose en el PMM, sin producir reflexiones, y se atenúa rápidamente. Puede observarse que la atenuación se lleva a cabo en una distancia menor a la profundidad determinada para el PML, por lo que este podría reducirse.

3.2.4. Estudio analítico de los parámetros básicos y su efecto en la respuesta.

En este apartado se pretende destacar los principales parámetros que gobiernan el comportamiento del PML, y que ya se han presentado con anterioridad, estudiando de forma breve como afectan a la precisión de este método. De cara a efectuar dicho análisis se definen previamente dos conceptos que serán empleados en este estudio: el coeficiente de reflexión y la rigidez dinámica del dominio Ω_F .

Como se ha comentado anteriormente, el fundamento del PML es un artefacto matemático que logra atenuar las ondas con el objetivo de evitar reflexiones indeseadas en los contornos. La idea tras la modificación de la coordenada dado por [3.25] no es otra que añadir a la coordenada x , de la cual es función la solución obtenida para la onda que se propaga, una parte imaginaria creciente a partir de la interfase con el PML. Esto es, transformar la coordenada real x en una coordenada compleja, cuya parte imaginaria queda controlada por la función $\lambda(x)$ y en concreto por la función de atenuación $f(x)$.

De forma ilustrativa basándonos en [3], si tomamos una función genérica a modo de solución armónica dada por e^{ikx} y la evaluamos a lo largo de la coordenada real x obtenemos el siguiente comportamiento oscilatorio:

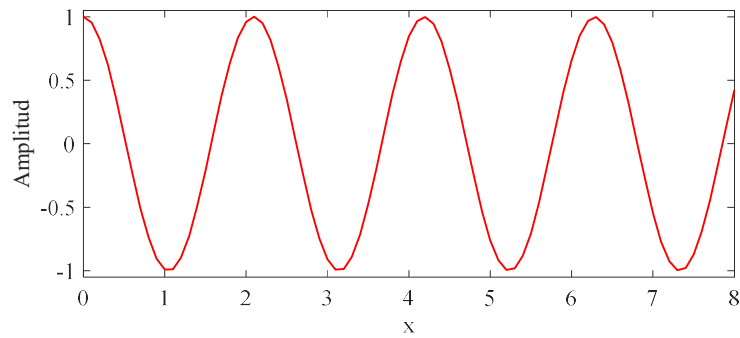


Figura 3.10. Oscilación en una coordenada real.

Si bien, ahora evaluamos la misma solución a lo largo de una coordenada x , la cual modificamos y logramos que a partir de un determinado punto comience a tener parte imaginaria no-nula, con un crecimiento lineal, por ejemplo, obtenemos el siguiente comportamiento:

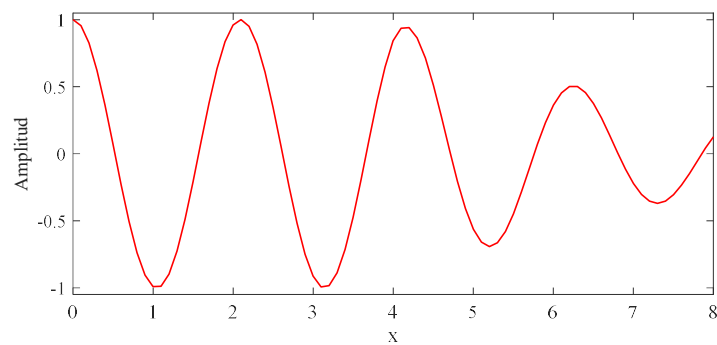


Figura 3.11. Aenuación de la oscilación conforme la coordenada se adquiere una parte compleja.

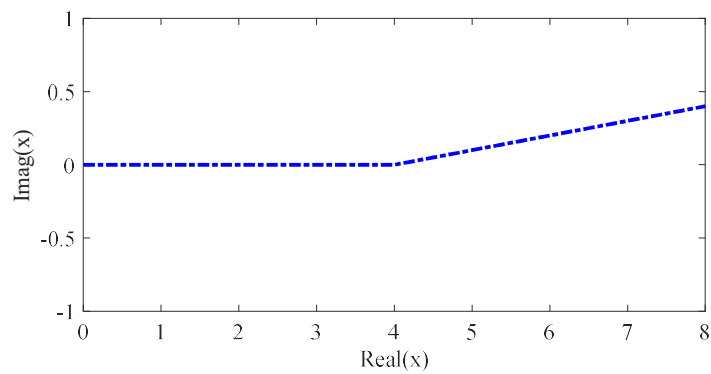


Figura 3.12. Parte real e imaginaria de la coordenada.

Es inmediato ver qué ocurre para el intervalo donde la parte imaginaria de la coordenada comienza a adquirir valores no nulos, y es que al evaluar la solución se obtiene,

$$e^{ik\tilde{x}} = e^{ik(Rex+ilmx)} = e^{ikRex} e^{-kIm} \quad [3.45]$$

en este caso a partir de $x=4$ la coordenada comienza a tener parte imaginaria no nula, y se logra la atenuación de la solución a partir de este punto.

Esta atenuación por lo tanto estará controlada por la constante k y la parte imaginaria de x . Es esto en lo que se basa la formulación del PML, donde la atenuación dependerá de la función $\lambda(x)$ y a su vez de la función de atenuación $f(x)$ que será la que controle la evolución de la parte imaginaria de la coordenada. Esto sirve para destacar la importancia en la elección de las funciones adecuadas y los valores de los parámetros, que tendrán una implicación radical en el comportamiento de los resultados obtenidos. Aunque en el apartado anterior ya se han expuesto algunas ideas sobre ello, es aquí donde se va a analizar, de forma breve, el efecto que esto presenta en la precisión de los resultados aplicando la teoría del PML.

La idea que se persigue aquí es analizar el efecto que presenta en los resultados el truncar a una determinada longitud finita L_p el PML, es decir, imponer la condición de borde de desplazamiento nulo en este extremo final. Para estudiar esto, tal y como propone [1] se compara de forma analítica la rigidez dinámica del sistema finito con la capa PML, Ω_F , con la obtenida para el sistema elástico semi-infinito, dada por [3.24]. En el momento en que truncamos a una determinada distancia la capa PML estamos asumiendo la posible reflexión de ondas, y el objetivo pasa a ser intentar controlar las amplitudes de estas, y lograr que sean lo menor posible. Por ello, antes de calcular la rigidez dinámica del dominio Ω_F , procedemos a exponer el concepto de coeficiente de reflexión, R .

Si consideramos una determinada capa PML, de longitud L_p , con la función $\lambda(x)$ definida tal y como se viene haciendo hasta ahora, y una onda unidimensional que penetra en el PML con amplitud unidad, y se propaga en este atenuándose según esta dirección, a la cual se le impone la condición de borde dada por $u(L_p) = 0$, entonces podemos admitir soluciones del tipo [3.46] para la onda que se propaga,

$$u(x) = \exp \left[-\frac{i\sqrt{a_o^2 - 1} \tilde{x}}{r_o} \right] + R \exp \left[+\frac{i\sqrt{a_o^2 - 1} \tilde{x}}{r_o} \right] \quad [3.46]$$

estando formada por un primer término correspondiente a la onda que se propaga a la derecha, y un segundo término que hace referencia a la onda que se refleja, cuya amplitud viene dada por R , y que se propaga hacia la izquierda. Es interesante conocer de qué depende esta amplitud de la onda reflejada, y si imponemos la condición $u(L_p) = 0$, operando se obtiene que

$$|R| = \exp \left[-2\bar{F} \left(\frac{L_p}{r_o} \right) \right] \quad [3.47]$$

Es decir, que la amplitud de la onda reflejada disminuye de forma exponencial con la integral de la

función de atenuación, \bar{F} , evaluada en el extremo final del PML. A la vista de [3.47] la amplitud de la onda que se refleje en el contorno del modelo dependerá de la elección de la función de atenuación, f , y la longitud de la capa PML, L_p . El coeficiente de reflexión aumenta con el grado de esta función.

Ahora bien, estamos en disposición de continuar con el propósito del presente apartado. Se obtuvo la rigidez dinámica en el extremo inicial para la barra semi-infinita dada por [3.24]:

$$\bar{S}^\infty(a_o) = \sqrt{1 - a_o^2}$$

concretamente la rigidez dinámica adimensional, para el caso del coeficiente de rigidez estático unidad. Esta rigidez dinámica obtenida para el medio elástico, donde se impone la condición de radiación para $x \rightarrow \infty$ será comparada en lo que sigue con la rigidez dinámica obtenida para el PMM, empleando las ecuaciones que gobiernan este [3.28] a [3.30], y siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado 3.2.1 para la obtención de $\bar{S}^\infty(a_o)$, con la salvedad de que ahora se asume la existencia de alguna onda reflejada en el medio y se ensayan soluciones del tipo:

$$u(x) = B_1 \exp \left[-\frac{\sqrt{1 - a_o^2} \tilde{x}}{r_o} \right] + B_2 \exp \left[+\frac{\sqrt{1 - a_o^2} \tilde{x}}{r_o} \right] \quad [3.48]$$

con B_1 y B_2 constantes, y la función $\lambda(x)$ tal como se viene empleando.

Si ahora determinamos las constantes imponiendo las condiciones $u(0) = 1$ y $u(L + L_p) = 0$, y calculamos la rigidez dinámica en $x=0$ de acuerdo a [3.19] y las ecuaciones [3.28] a [3.30]:

$$-\sigma(x=0)A = -\frac{EA}{\lambda(x)} \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} \quad [3.49]$$

Obtenemos para la rigidez dinámica adimensional del dominio Ω_F ,

$$\bar{S}(a_o) = \bar{S}^\infty(a_o) \frac{1 + |R| \exp \left[-\frac{2\sqrt{1 - a_o^2}(L + L_p)}{r_o} \right]}{1 - |R| \exp \left[-\frac{2\sqrt{1 - a_o^2}(L + L_p)}{r_o} \right]} \quad [3.50]$$

con R el factor de reflexión y $\bar{S}^\infty(a_o)$ la rigidez dinámica adimensional del sistema semi-infinito. Podemos observar como la rigidez del sistema acotado, Ω_F , tiende a la del sistema semi-infinito conforme el factor R se hace nulo. Es decir, es equivalente a decir que si las ondas reflejadas son de muy baja amplitud los resultados del sistema finito serán lo suficientemente aproximados.

Ahora bien, vamos a analizar la precisión de los resultados obtenidos aplicando la teoría del PML, comparando la rigidez dada por [3.50] con la dada por [3.24], para diferentes valores de los parámetros.

Se tomará la función de atenuación de nuevo de la forma dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq L \\ f_o \left(\frac{x}{L_p} \right)^m, & L < x \leq L_p \end{cases} \quad [3.51]$$

Los parámetros que controlan el resultado de la aproximación al medio semi-infinito mediante la aplicación del PML son, como consecuencia de [3.50]: la longitud de la capa dispuesta, L_p y la función de atenuación, es decir, f_o y m . Para el análisis de la profundidad de la capa, L_p , será esta comparada con la dimensión del dominio elástico (Ω_f), L ; y ambas adimensionalizadas a la dimensión característica r_o .

Para establecer la comparación se descomponen las rigideces dinámicas en una parte compleja y una parte real, de la forma:

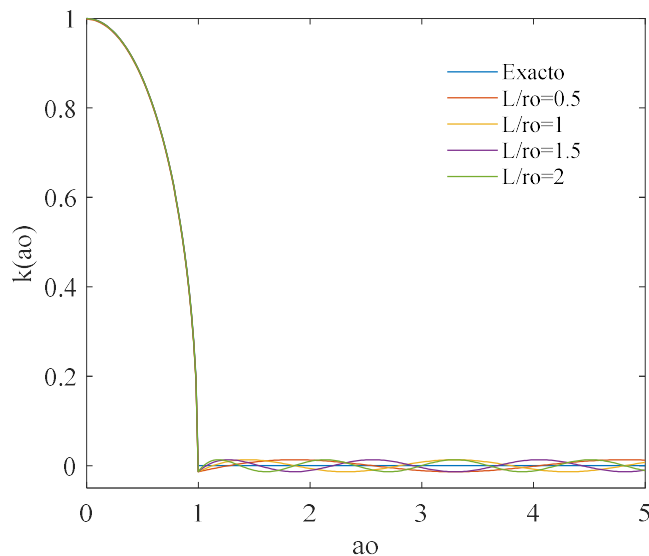
$$\bar{S}(a_o) = k(a_o) + iaoc(a_o) \quad [3.52]$$

$$\bar{S}^\infty(a_o) = k(a_o) + iaoc(a_o) \quad [3.53]$$

donde k y c se conocen como coeficientes de rigidez y amortiguamiento, función de la frecuencia adimensional a_o . Observar que para $a_o > 1$ las rigideces dinámicas adquieren valores complejos.

Dicho esto, se extraen las siguientes conclusiones:

- En la Figura 3.13 se revela que, si se dispone una longitud de la capa absorbente, L_p , la cual no es suficiente para la atenuación de la onda, el hecho de incrementar la longitud del dominio elástico, L , no mejora la precisión de los resultados. Esto es, no se trata de una cuestión de relación $\frac{L_p}{L}$, sino de disponer la suficiente profundidad para la capa absorbente, independientemente del tamaño del dominio elástico adyacente, de cara a obtener unos buenos resultados. En la Figura 3.14 se puede observar esto, para una profundidad suficiente, del orden de $L_p \sim r_o$, el tamaño del medio elástico influye poco en los resultados. Es decir, el objetivo será disponer profundidades de capas tales que sean suficientes para atenuar la onda y así obtener resultados que tienden al exacto.



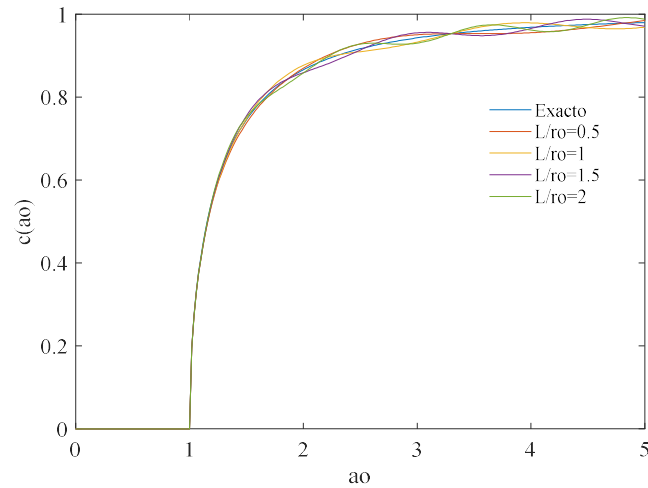


Figura 3.13. Rigidez dinámica según los valores de L/ro , disponiendo profundidad L_p insuficiente ($L_p < ro$)

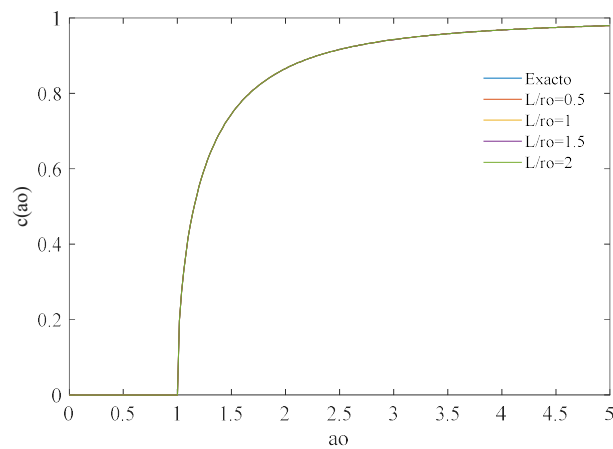
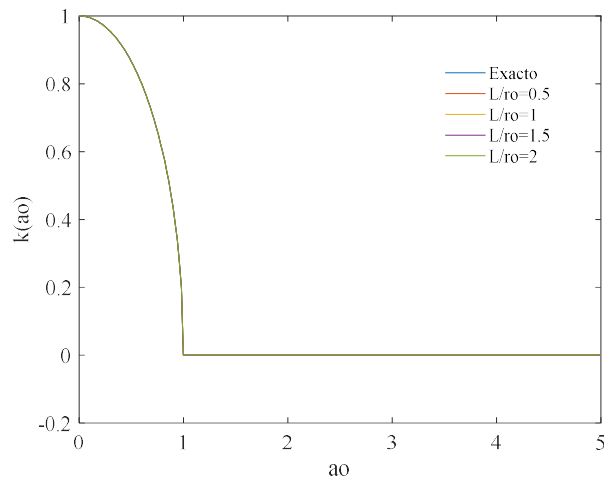


Figura 3.14. Resultados obtenidos para la rigidez dinámica en función de la longitud elástica (L/ro) empleando una profundidad del PML suficiente ($L_p > ro$)

- Por otro lado, en cuanto a la función de atenuación, estudiamos el efecto de los valores f_o y m , primero fijando un valor del grado del polinomio igual a la unidad: lo que pone de manifiesto que conforme crece el valor de f_o obtenemos mayor precisión, tal como se observa en la Figura 3.15. De la misma forma, fijando un valor para el parámetro f_o , se observa que los resultados se alejan del exacto conforme la función adquiere un mayor grado. Esto es algo que ya se indicó en el apartado anterior.

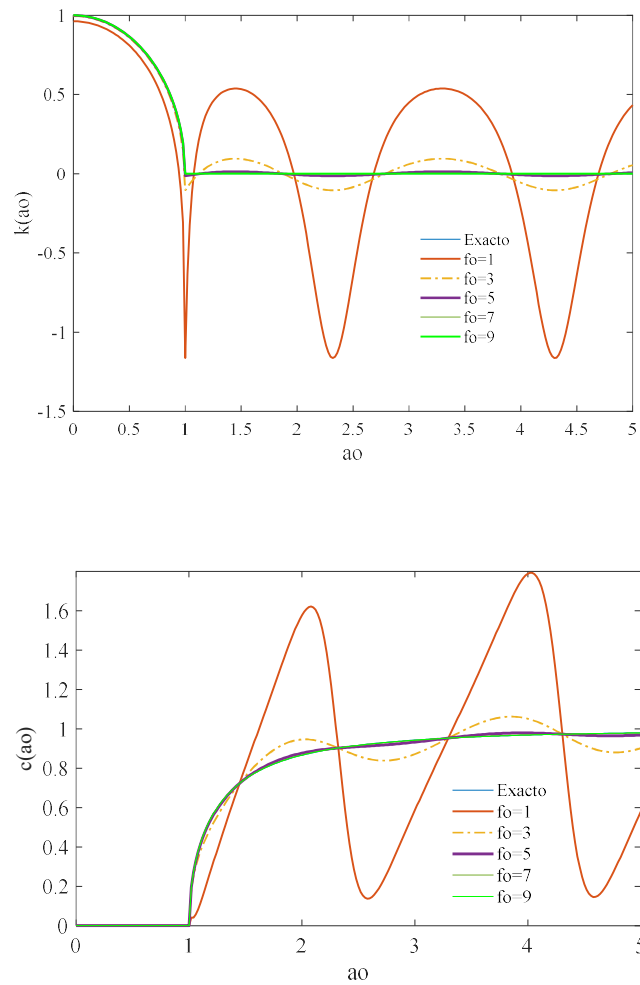


Figura 3.15. Resultados obtenidos para diferentes valores de f_o .

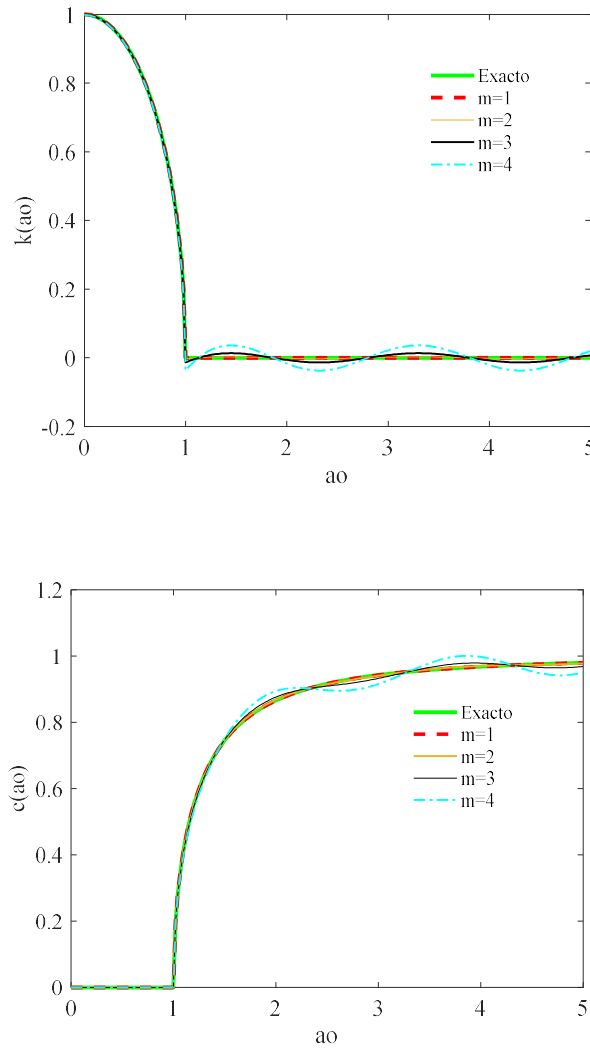


Figura 3.16. Resultados obtenidos para diferentes grados de la función de atenuación.

3.3. Implementación en el MEF. Análisis numérico del caso unidimensional.

En todo momento la teoría aquí presentada está desarrollada de cara a servir a los modelos de cálculo numéricos, donde uno de los más empleados y del cual se va a hacer uso en este trabajo es el Método de los Elementos Finitos. El objetivo aquí es indicar como se implementa esta teoría, que hasta ahora se ha manejado de forma analítica, en el cálculo numérico y en concreto en el MEF. Para ello, y dado que se ha hecho hincapié en el caso unidimensional, aquí se presenta la formulación para el elemento unidimensional tipo barra de dos nodos.

Suponemos un elemento recto, unidimensional, con dos nodos y un grado de libertad de desplazamiento axial en cada nodo. Dicho elemento es un PMM, de modo que partimos de las ecuaciones que lo gobiernan y que ya conocemos [3.28] a [3.30]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda(x)} \frac{d\sigma}{dx} - \frac{k_g}{A} u &= -\omega^2 \rho u \\ \varepsilon &= \frac{1}{\lambda(x)} \frac{du}{dx} \\ \sigma &= E \varepsilon\end{aligned}$$

Si redefinimos:

$$\varepsilon := \lambda(x) \varepsilon \quad [3.54]$$

y multiplicamos la primera ecuación por $\lambda(x)$, quedarían

$$\frac{d\sigma}{dx} - \frac{k_g}{A} \lambda(x) u = -\omega^2 \lambda(x) \rho u \quad [3.55]$$

$$\sigma = \frac{E}{\lambda(x)} \varepsilon \quad [3.56]$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad [3.57]$$

Observar que la función $\lambda(x)$ acaba provocando una alteración en las propiedades del material [3.56] y es por esto que típicamente se interprete al PML como un medio elástico anisótropo, cuando se extiende a más dimensiones.

Las ecuaciones del MEF, como para todo problema gobernado por una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales, se obtendrá a partir de la forma débil de dicha ecuación. Para obtener dicha forma débil multiplicamos la ecuación [3.55] por una determinada función w , la cual debe ser admisible y presenta un carácter arbitrario,

$$\frac{d\sigma}{dx} w - \frac{k_g}{A} \lambda(x) u w = -\omega^2 \lambda(x) \rho u w \quad [3.58]$$

e integrando [3.58] en el dominio Ω ,

$$\int_{\Omega} \frac{d\sigma}{dx} w d\Omega - \int_{\Omega} \frac{k_g}{A} \lambda(x) u w d\Omega = - \int_{\Omega} \omega^2 \lambda(x) \rho u w d\Omega \quad [3.59]$$

Si ahora tomamos el primer término de [3.59] y aplicamos integración por partes,

$$\int_{\Omega} \frac{d\sigma}{dx} w d\Omega = (w\sigma)|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \sigma \frac{dw}{dx} d\Omega \quad [3.60]$$

Introduciendo [3.50] en [3.59] se tiene,

$$(w\sigma)|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \sigma \frac{dw}{dx} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{k_g}{A} \lambda(x) u w d\Omega = - \int_{\Omega} \omega^2 \lambda(x) \rho u w d\Omega \quad [3.61]$$

Reordenando los términos,

$$\int_{\Omega} \sigma \frac{dw}{dx} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{k_g}{A} \lambda(x) u w d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \lambda(x) \rho u w d\Omega = (w\sigma)|_{\partial\Omega} \quad [3.62]$$

con $\partial\Omega$ el contorno del dominio de integración.

Ahora bien, lo siguiente para la obtención de las ecuaciones del MEF será discretizar el dominio Ω en determinados subdominios elementales Ω_e , y aproximar en el elemento tanto el campo básico (campo de desplazamientos, u) como la función arbitraria w , de la forma:

$$u(x) = \sum_{j=1}^N u_j \cdot N_j(x) \quad [3.63]$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^N w_i \cdot N_i(x) \quad [3.64]$$

donde u_i y w_j son los valores nodales del campo de desplazamientos y de la función de ponderación; $N_i(x)$ es la función de forma asociada al nodo i y definida en todo el elemento, y $N_j(x)$ la función de forma asociada al nodo j y definida en todo el dominio elemental; y N es, de forma general, el número de nodos del elemento en cuestión.

Teniendo en cuenta [3.56], [3.57]:

$$\sigma = \frac{E}{\lambda(x)} \frac{du}{dx} \quad [3.65]$$

Que introduciendo en el primer término de [3.62],

$$\int_{\Omega} \frac{E}{\lambda(x)} \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{k_g}{A} \lambda(x) u w d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \lambda(x) \rho u w d\Omega = (w\sigma)|_{\partial\Omega} \quad [3.66]$$

Ahora bien hacemos uso de [3.63] y [3.64], e integramos en el dominio elemental, Ω^e

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^e} w_i \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{E}{\lambda(x)} \frac{dN_j(x)}{dx} u_j d\Omega^e \\
 & + \frac{1}{A} \int_{\Omega^e} w_i N_i(x) \lambda(x) k_g N_j(x) u_j d\Omega^e \\
 & - \omega^2 \int_{\Omega^e} w_i N_i(x) \lambda(x) \rho N_j(x) u_j d\Omega^e = (w\sigma)|_{\partial\Omega^e}
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Operando con [3.67],

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^e} w_i \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{E}{\lambda(x)} \frac{dN_j(x)}{dx} u_j d\Omega^e \\
 & + \int_{\Omega^e} w_i N_i(x) \lambda(x) \frac{k_g}{A} N_j(x) u_j d\Omega^e \\
 & - \omega^2 \int_{\Omega^e} w_i N_i(x) \lambda(x) \rho N_j(x) u_j d\Omega^e = (w\sigma)|_{\partial\Omega^e}
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
 & w_i \left[\int_{\Omega^e} \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{E}{\lambda(x)} \frac{dN_j(x)}{dx} d\Omega^e \right] u_j + w_i \left[\int_{\Omega^e} N_i(x) \lambda(x) \frac{k_g}{A} N_j(x) d\Omega^e \right] u_j \\
 & - w_i \left[\int_{\Omega^e} N_i(x) \lambda(x) \rho N_j(x) d\Omega^e \right] \omega^2 u_j = (w\sigma)|_{\partial\Omega^e}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Dado el carácter arbitrario de la función w [3.69] debe satisfacerse para cualquier valor que esta adquiera, lo que lleva a la relación siguiente

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{\Omega^e} \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{E}{\lambda(x)} \frac{dN_j(x)}{dx} d\Omega^e \right] u_j + \left[\int_{\Omega^e} N_i(x) \lambda(x) \frac{k_g}{A} N_j(x) d\Omega^e \right] u_j \\
 & - \left[\int_{\Omega^e} N_i(x) \lambda(x) \rho N_j(x) d\Omega^e \right] \omega^2 u_j = (\sigma)|_{\partial\Omega^e}
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

La ecuación obtenida, (59), no es más que la ecuación de equilibrio elemental, entre fuerzas elásticas,

inerciales y externas, en el dominio de la frecuencia. De forma matricial,

$$([K^e] - \omega^2[M^e])\underline{U} = F^{ext} \quad [3.71]$$

siendo:

$$\underline{U} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_N]^T,$$

vector que contiene los desplazamientos nodales;

$$F_i^{ext} = (\sigma)|_{\partial\Omega^e} = \sum_{i=1}^N f_i$$

la fuerza externa al elemento en el nodo i . Nótese que no se han considerado cargas distribuidas a lo largo del elemento.

$$K^e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & \cdots & k_{1N}^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1}^e & \cdots & k_{NN}^e \end{bmatrix}$$

la matriz de rigidez del elemento, con cada una de sus componentes dada por

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{E}{\lambda(x)} \frac{dN_j(x)}{dx} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} N_i(x) \lambda(x) \frac{k_g}{A} N_j(x) d\Omega^e \quad [3.72]$$

$$M^e = \begin{bmatrix} m_{11}^e & \cdots & m_{1N}^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1}^e & \cdots & m_{NN}^e \end{bmatrix}$$

la matriz de masa del elemento, con cada una de sus componentes dada por

$$m_{ij}^e = \int_{\Omega^e} N_i(x) \lambda(x) \rho N_j(x) d\Omega^e \quad [3.73]$$

En este caso, dado el dominio unidimensional, tenemos que:

$$d\Omega^e = A dx \quad [3.74]$$

Que teniéndolo en cuenta se obtendría:

$$k_{ij}^e = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{EA}{\lambda(x)} \frac{dN_j(x)}{dx} dx + \int_{x_1}^{x_2} N_i(x) \lambda(x) k_g N_j(x) dx \quad [3.75]$$

$$m_{ij}^e = \int_{x_1}^{x_2} N_i(x) \lambda(x) m N_j(x) dx \quad [3.76]$$

donde m es la masa por unidad de longitud, $m = \rho A$; x_1 y x_2 son las coordenadas de los extremos del elemento. Cabe comentar que a diferencia de las funciones de forma, N_i , la función $\lambda(x)$ no está definida de forma elemental, sino de forma global en el dominio.

3.4. Análisis numérico del caso unidimensional

Se implementan las expresiones obtenidas para las matrices del MEF para el caso unidimensional que se viene analizando en un simple código de MATLAB (Código 1 del Anexo). La intención es probar que los resultados obtenidos analíticamente se logran de forma numérica. Se discretiza la barra unidimensional empleando elementos tipo barra, unidimensionales de dos nodos, con un solo grado de libertad por nodo en dirección axial, y funciones de forma lineales dadas por

$$N_i(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad [3.77]$$

$$N_j(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad [3.78]$$

siendo ξ la coordenada natural definida en $-1 < \xi < 1$

Puesto que se aborda el problema en el dominio de la frecuencia como se ha venido planteando analíticamente, la ecuación de la dinámica a resolver será

$$\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{S}(\omega)\mathbf{u}(\omega) \quad [3.79]$$

siendo $\mathbf{u}(\omega)$ un vector que contiene los desplazamientos de los nodos, incógnita; $\mathbf{P}(\omega)$ es un vector que contiene las fuerzas nodales, y $\mathbf{S}(\omega)$ es la matriz de rigidez dinámica dada por,

$$\mathbf{S}(\omega) = [-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}] \quad [3.80]$$

siendo \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de la barra. Estas matrices serán obtenidas mediante el MEF de acuerdo a las expresiones obtenidas en el apartado anterior, considerando el PMM. La barra tendrá una determinada longitud L , y la capa PML otra longitud, L_p . La función $\lambda(x)$ se definirá de forma global de acuerdo a [3.42] y [3.43] de modo que el efecto del PML solo entrará en juego para $x > L$. Nótese que las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} resultarán ser funciones de la frecuencia, dada la formulación y la elección de $\lambda(x)$, además de en banda y complejas. De este modo tanto las matrices de rigidez dinámica como las de masa, amortiguamiento y rigidez han de hallarse para cada frecuencia.

La matriz de amortiguamiento no ha entrado en juego en el razonamiento analítico seguido hasta aquí, pero puede hallarse suponiendo amortiguamiento proporcional de Rayleigh, de la forma $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ con los coeficientes α, β dados por,

$$\alpha = \xi \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad [3.81]$$

$$\beta = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad [3.82]$$

siendo ξ el factor de amortiguamiento respecto del crítico, y ω_i, ω_j las frecuencias extremas del rango de frecuencias a considerar en el análisis. De todas formas, se supone amortiguamiento nulo, como en los resultados analíticos.

El problema que se ha de resolver implica las condiciones de contorno de desplazamiento impedido en el último nodo (final de la capa PML) y el desplazamiento unidad prescrito en el nodo correspondiente al inicio de la barra. Si diferenciamos los desplazamientos conocidos de los que son incógnita en el problema, se puede reescribir el sistema como

$$\begin{bmatrix} P_c \\ P_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cc} & S_{cd} \\ S_{dc} & S_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_d \end{bmatrix} \quad [3.83]$$

siendo u_c los desplazamientos conocidos (nulo en el final del PML y unidad en el inicio de la barra), u_d los desplazamientos desconocidos (en el resto de nodos) e incógnitas, P_c las componentes incógnitas del vector de fuerzas (el subíndice c aquí puede ser inadecuado), una la reacción en el final del PML y otra la fuerza en el nodo inicial, que es a su vez la rigidez dinámica en el inicio de la barra, y P_d serían las fuerzas nodales en el resto de nodos, que son conocidas y nulas.

De [3.83] se obtienen las ecuaciones:

$$u_d = -S_{dd}^{-1} S_{dc} u_c \quad [3.84]$$

$$P_c = S_{cc} u_c + S_{cd} u_d \quad [3.85]$$

de la primera obtenemos los desplazamientos, de la segunda obtenemos la rigidez dinámica en el inicio de la barra, que será comparada con el resultado teórico, $\bar{S}^\infty(a_o)$, para la barra semi-infinita.

Los parámetros a variar son n_e y n_p el número de elementos en la longitud elástica y en el PML, respectivamente. Para la función de atenuación se toma $f_o = 10$ y $m = 1$, y para la longitud de la barra $L = 5$ m.

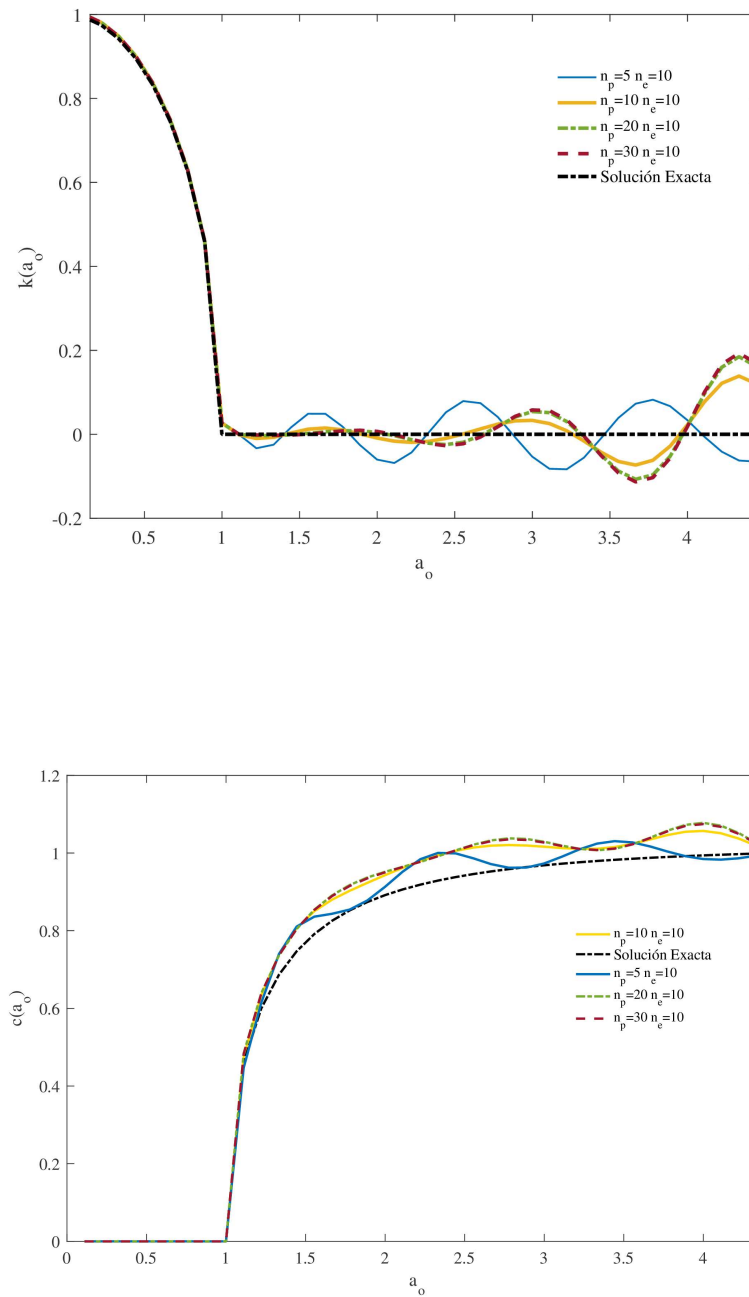


Figura 3.17. Resultados obtenidos para la rigidez dinámica en inicio de la barra para un número de 10 elementos en la zona elástica (n_e) y diferentes elementos en la zona del PML (n_p)

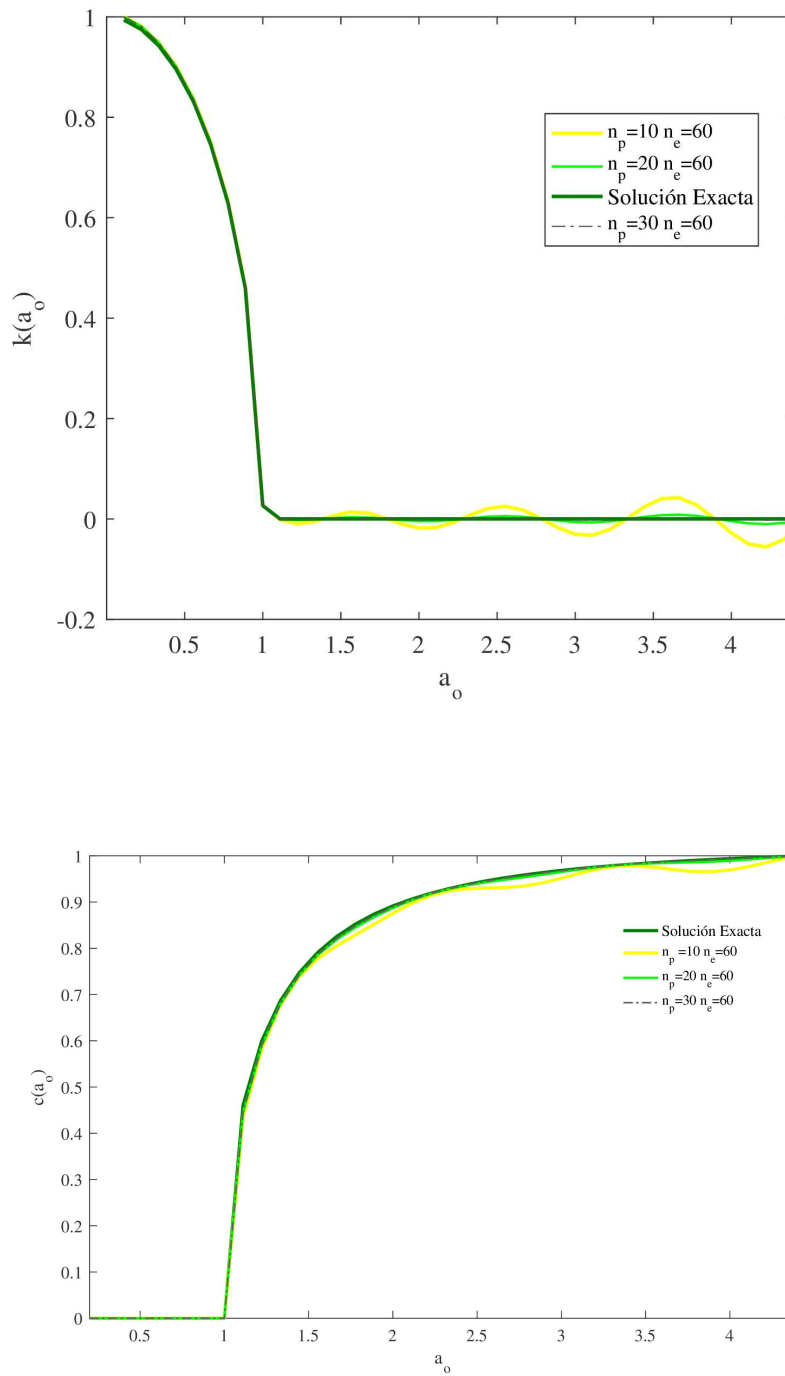


Figura 3.18. Resultados obtenidos para la rigidez dinámica en inicio de la barra para un numero de 60 elementos en la zona elástica (n_e) y diferentes elementos en la zona de PML (n_p)

Se exponen los resultados obtenidos para la rigidez dinámica en el extremo de la barra, frente a la solución analítica exacta para el caso de la barra infinita. A la vista de las Figuras 3.17 y 3.18, podemos comprobar que con un mallado de la zona elástica insuficiente, el aumentar el número de elementos en la zona del PML no produce mejores resultados, sino más bien, peores. Sin embargo, si el mallado de la zona elástica es suficientemente denso, podemos apreciar como con relativamente pocos elementos en la zona del PML (un tercio aproximadamente) la solución se encuentra muy proxima a la analítica.

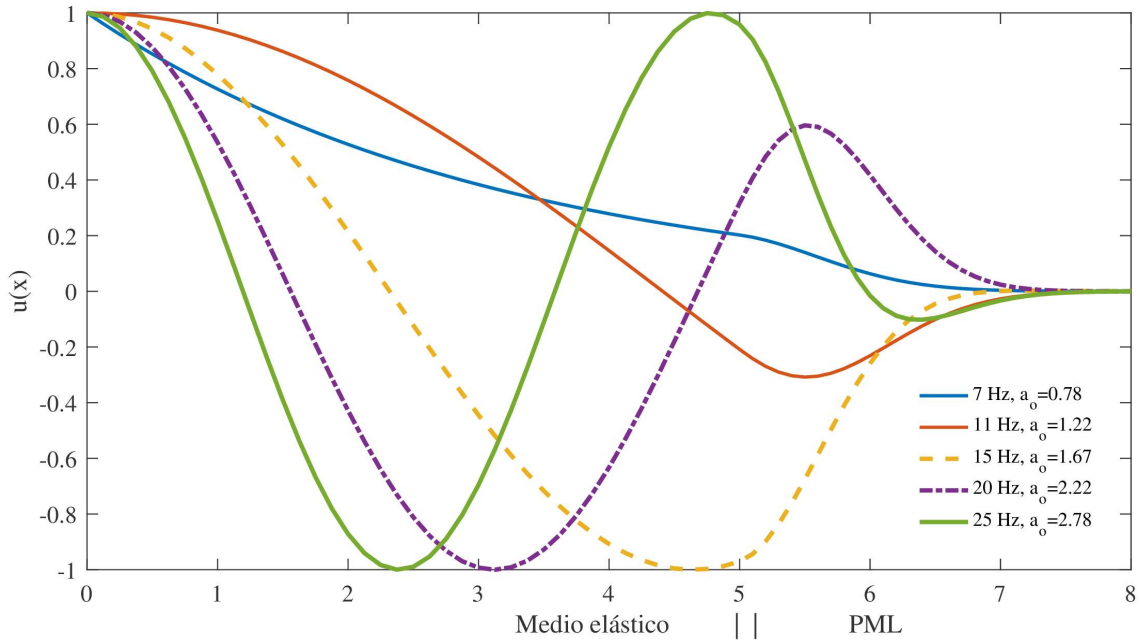


Figura 3.19. Desplazamientos longitudinales en la barra para diferentes frecuencias de excitación.

También podemos apreciar los resultados obtenidos para los desplazamientos $u(x, a_o)$, es decir el vector u_d , en la Figura 3.19, para diferentes frecuencias de excitación en el extremo libre de la barra. Se aprecia claramente como las ondas penetran en la zona de PML $x > 5$ y se atenúan rápidamente, como se esperaba.

3.5. Formulación general para el caso tridimensional.

Una vez profundizado en el caso unidimensional, de cara a plasmar las ideas principales, se recoge aquí de forma más breve la extensión de dicha formulación al caso tridimensional genérico. La formulación es de la misma forma propuesta por U. Basu y A.K.Chopra en [4].

Considérese el problema elastodinámico de la forma general, definido por las ecuaciones ya presentadas en el capítulo 2, definido en un dominio isótropo, elástico-lineal y homogéneo,

$$\text{Equilibrio} \quad \sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i$$

$$\text{Compatibilidad} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\text{Comportamiento} \quad \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Si bien, supónganse nulas las fuerzas volumétricas, y admítase un campo de desplazamientos con dependencia temporal armónica de la forma $\mathbf{u}(\mathbf{x})\exp(i\omega t)$, la ecuación de equilibrio queda

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\omega^2 \rho u_i \quad [3.86]$$

Compatibilidad y comportamiento, de la misma forma

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad [3.87]$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad [3.88]$$

siendo C_{ijkl} las componentes del tensor de rigidez o propiedades constitutivas del material, \mathbf{C} , dadas por $C_{ijkl} = \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ con k el modulo de Bulk y δ_{ij} la delta de Kronecker. Los subíndices $i, j, k, l \in (1,2,3)$ para el caso tridimensional.

(Observar que se ha abandonado la notación indicial de cara a seguir con la notación empleada en [] para la formulación del PML)

Las ecuaciones definidas sobre un dominio semiinfinito admiten soluciones de ondas planas armónicas del tipo P,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = e^{-ik_p \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}} \mathbf{q} \quad [3.89]$$

y S,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = e^{-ik_s \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}} \mathbf{q} \quad [3.90]$$

donde k_i es el número de onda, dado por $k_i = \omega/c_i$, con c_i tomando el valor de c_s o c_p , \mathbf{q} es el vector unitario en dirección del movimiento y \mathbf{p} el vector unitario en dirección de la propagación, con las consideraciones establecidas en el capítulo 2

Pues bien, bajo la misma idea que para el caso unidimensional, se define el PMM mediante las siguientes ecuaciones

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j(x_j)} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\omega^2 \rho u_i \quad [3.91]$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad [3.92]$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_j(x_j)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\lambda_i(x_i)} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad [3.93]$$

donde λ_i será una función continua, y compleja, de tal forma que

$$\tilde{x}_i = \int_0^{x_i} \lambda_i(s) ds \quad [3.94]$$

de igual forma que en el caso unidimensional, la continuidad de dicha función implica que

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{1}{\lambda_i(x_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad [3.95]$$

las ecuaciones del PMM admiten, en un medio semi-infinito, igualmente soluciones de onda tipo P y S, de la forma

$$\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}, \omega) = e^{-ik_p \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}} \mathbf{q} \quad [3.96]$$

$$\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}, \omega) = e^{-ik_s \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}} \mathbf{q} \quad [3.97]$$

de nuevo las funciones λ_i han de elegirse convenientemente. Por ejemplo, si se elige de la forma:

$$\lambda_i(x_i) = 1 - i \frac{f_i(x_i)}{k_s} \quad [3.98]$$

con f_i la función de atenuación, y de este modo

$$\tilde{x}_i = x_i - i \frac{F_i(x_i)}{k_s} \quad [3.99]$$

siendo

$$F_i(x_i) = \int_0^{x_i} f_i(\xi) d\xi \quad [3.100]$$

se obtienen soluciones del tipo

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \exp \left[-\frac{c_s}{c_p} \sum_i F_i(x_i) p_i \right] e^{-ik_p \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}} \mathbf{q} \quad [3.101]$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \exp \left[-\sum_i F_i(x_i) p_i \right] e^{-ik_s \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}} \mathbf{q} \quad [3.102]$$

las cuales responden a [3.96] y [3.97], soluciones en el medio elástico, pero con una atenuación impuesta, si $F_i(x_i) > 0$ y $p_i > 0$. El PMM y así el PML obtienen las mismas propiedades ya comentadas para el caso unidimensional.

4 CASO DE APLICACIÓN: COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE CIMENTACIONES

Tras exponer el concepto del PML y su influencia en la respuesta de problemas en medios semi-infinitos, se dedica este capítulo a la aplicación numérica de dicho método con un objetivo centrado en la interacción suelo-estructura.

Se trata de obtener, por medio de modelos numéricos de elementos infinitos desarrollados con la herramienta ANSYS Mechanical APDL, las rigideces dinámicas de cimentaciones. En primer lugar, se dedica una sección a plasmar las ideas básicas del concepto de rigidez dinámica de una determinada cimentación y su importancia y utilidad en el cálculo de estructuras teniendo en cuenta su interacción con el suelo, para luego presentar los modelos y resultados obtenidos.

Este problema ha sido estudiado por numerosos autores, en diversos libros y artículos, como Wong & Luco [8] (1976), (1985), para cimentaciones cuadradas y de forma arbitraria; Domínguez (1978) [24,25] para cimentaciones superficiales y embebidas; Veletsos, A.S [22,23] algunos de los cuales han servido de ayuda e inspiración para la generación de este capítulo. Existen diferentes técnicas para abordar la solución del problema, desde soluciones analíticas, semianalíticas, pasando por formulaciones mediante elementos de contorno (discretizando únicamente la superficie libre), modelos de elementos finitos que incorporen condiciones de contorno adecuadas, etc.

En el presente trabajo se generan modelos de elementos finitos acoplando capas de elementos que implementan la formulación del PML en los contornos, buscando así reproducir el carácter infinito del medio y la radiación de las ondas en el mismo.

4.1. Concepto de rigidez dinámica

En primer lugar, definir el concepto de rigidez dinámica (o impedancia) de una determinada cimentación. Esto no es más, ni menos, que la relación existente entre las fuerzas y momentos, cualesquiera que sean, aplicados sobre el cimiento, y los desplazamientos (traslaciones y giros) que este experimenta,

$$z = \frac{f}{u} \quad [4.1]$$

Si bien, cabe apuntar ciertas consideraciones. En primer lugar, la matriz de impedancia dinámica relaciona las cargas y desplazamientos en la interfase cimentación-suelo o contorno. Esto es, para una determinada sollicitación que experimenta un punto de dicha interfase, obtenemos el desplazamiento en la misma. Se suele llamar por ello matriz de impedancia del suelo, y dependerá de la forma de la cimentación, la carga y las propiedades del suelo.

Por otro lado, el estudio de la impedancia dinámica se aborda en el dominio de la frecuencia y, además, se suponen sollicitaciones de tipo armónico en el estudio de la misma. Esto es,

$$\mathbf{z}(\omega) = \frac{\mathbf{f}(\omega)}{\mathbf{u}(\omega)} \quad [4.2]$$

donde ω es la frecuencia angular de excitación, y de esta forma la matriz de impedancia dinámica \mathbf{z} , el vector de fuerzas y momentos, \mathbf{f} y el vector de traslaciones y rotaciones, \mathbf{u} , serán funciones de la frecuencia.

El realizar el estudio bajo sollicitaciones armónicas proporciona simplicidad, siendo de gran utilidad dado que otro tipo de excitación de naturaleza cualquiera podrá expresarse como combinación de excitaciones armónicas mediante series de Fourier para excitaciones de naturaleza periódica, o la Transformada de Fourier para aquellas no periódicas.

En la relación [4.2] las fuerzas aplicadas y los desplazamientos resultantes suelen encontrarse desfasados. Esto es debido principalmente al amortiguamiento del suelo. Para tratar adecuadamente estos, se descomponen matrices y vectores en parte real e imaginaria:

$$z_{ij}(\omega) = Re(z_{ij}(\omega)) + i Im(z_{ij}(\omega)) \quad [4.3]$$

La parte imaginaria está relacionada con la rigidez e inercia del suelo, mientras que la parte compleja modela el amortiguamiento de este. Se pueden distinguir principalmente dos amortiguamientos en el suelo, de naturaleza diferente: el amortiguamiento propio del material, y el amortiguamiento de radiación. Este segundo es el que presenta un mayor efecto, y es debido a la disipación de energía asociada a la propagación de las ondas en el medio (Domínguez, [3]). Observar que este fenómeno de radiación deberá ser modelizado para la obtención de resultados representativos.

Es fácil imaginar que en modelos suelo-estructura donde debemos acotar el mismo, y no tenemos posibilidad de simular dicha propagación en los contornos (modelizar adecuadamente el medio semi-infinito) este fenómeno no podrá ocurrir, y si se darán reflexiones espurias que afectarán al resultado. Es el objetivo de las próximas secciones, generar modelos de elementos finitos que implementen Perfectly Matched Layers de cara a plasmar un comportamiento realista del medio.

Es bastante común, debido a la dependencia del amortiguamiento con la frecuencia, expresar la matriz de impedancia dinámica como

$$z_{ij}(\omega) = z_{oij} \left[z_{kij} + i a_o z_{cij} \right] \quad [4.4]$$

donde z_{oij} es la rigidez estática; z_{kij} y z_{cij} son coeficientes que dependen de la frecuencia y a_o es una frecuencia adimensional dada generalmente por $a_o = \frac{\omega B}{C_s}$, siendo C_s la velocidad de propagación de

ondas de corte en el medio y B una longitud característica (usualmente el semi-lado en zapatas cuadradas, o el radio en zapatas circulares..etc)

De igual forma que definimos la matriz de impedancia, tenemos la matriz de compliancia o flexibilidad como su inversa,

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{C}(\omega) \mathbf{f}(\omega) \quad [4.5]$$

donde $C_{ij}(\omega) = Re(C_{ij}(\omega)) + i Im (C_{ij}(\omega))$ es la matriz de compliancia dinámica con las mismas propiedades expuestas anteriormente.

Pues bien, una vez expuesto el concepto, cabe dedicar unas líneas a destacar la importancia y utilidad de estas matrices. Es lo que pretende la siguiente sección donde se presenta un método muy extendido en el cálculo de determinadas estructuras considerando la interacción con el suelo.

4.2. El método de la subestructuración para la interacción suelo-estructura

Existen diversas formas y métodos con los que abordar el problema de la interacción suelo-estructura. La elección de uno u otro método dependerá de diferentes factores entre los que será clave, evidentemente, la tipología estructural a analizar y su cimentación. De forma muy breve, podemos distinguir dos tipos de métodos: el Método Directo y el Método de la Subestructuración (o Método de los tres Pasos).

El primero de estos se aplica al conjunto suelo-estructura, es decir, se analiza el conjunto como un todo. Se generarán modelos numéricos que representen la estructura, el suelo, y su área de contacto, y se someterán a las acciones pertinentes extrayendo la respuesta. Mientras tanto, el Método de la Subestructuración aborda el problema descomponiendo el dominio completo en subdominios a estudiar adecuadamente. Esto es, descomponer el dominio suelo-estructura, Ω_T como suma de un subdominio que representa a la estructura Ω_s y otro que representa al suelo Ω_g , con Γ_b la interfase entre ambos subdominios. Observar que esta interfase o contorno de contacto pertenecerá al suelo, y a la cimentación de la estructura.

$$\Omega_T = \Omega_s \cup \Omega_g \quad [4.6]$$

A la hora de discretizar los dominios para abordar el problema mediante métodos numéricos, se distinguirán: los nodos correspondientes exclusivamente a la estructura, con n_s grados de libertad, los pertenecientes al suelo, n_g y los que se encuentran en la interfase, n_b .

El Método de los tres Pasos, como su nombre indica, debe resolverse en tres pasos:

- *Interacción cinemática.* Un primer paso en que, considerando la cimentación rígida (sólido indeformable) y sin masa, se determinan los desplazamientos que esta experimenta ante un determinado movimiento (tren de ondas) que incida en ella a través del medio.
- *Cálculo de impedancias.* En el segundo paso se calculan las impedancias dinámicas de la cimentación. Es este el motivo por el que se expone aquí este método.
- *Interacción inercial.* El tercer paso corresponde a calcular la estructura con su masa, supuesta apoyada sobre determinados resortes con las propiedades (rigidez, amortiguamiento) del suelo analizadas en el paso anterior. Dichos resortes estarán sujetos a una base indeformable. A este sistema se le someterá a los movimientos determinados en el primer apartado.

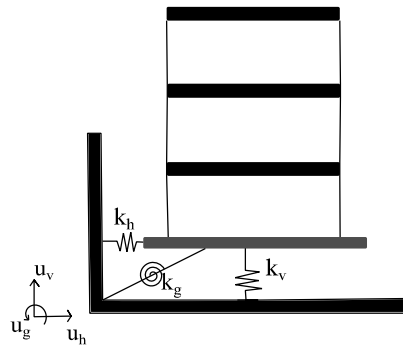


Figura 4.1. Esquema del modelo simplificado producto del método. Las rigideces serán funciones de la frecuencia.

Nótese el claro enfoque sísmico que posee el método. Se presenta de gran utilidad en problemas sísmicos donde la estructura se ve sometida a movimientos en su base producto de las ondas de esta naturaleza que se propagan en el terreno. No obstante, es de interés aquí dado que el cálculo de impedancias dinámicas posee una clara importancia de cara a evaluar correctamente el comportamiento.

Además de la utilidad ante análisis sísmico de estructuras, el cálculo de impedancias dinámicas es de gran relevancia en el diseño de cimentaciones para máquinas las cuales inducen importantes vibraciones a las mismas. Es extendida la generación de modelos simplificados donde la estructura se apoya en determinados resortes tipo Winkler, que representan adecuadamente el comportamiento dinámico del terreno.

Se ha de considerar que método de la subestructuración será de aplicación bajo hipótesis de comportamiento elástico-lineal, y la consideración de la cimentación como un sólido rígido será asumible en determinados casos.

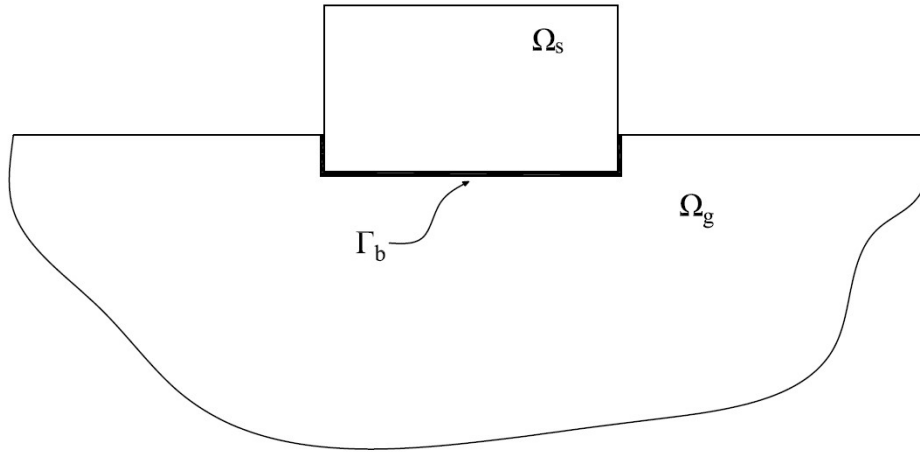


Figura 4. Modelo de subestructuración

Supongamos abordar el problema mediante el Método de los Elementos Finitos, la ecuación de equilibrio dinámica, en el dominio Ω_T , convenientemente discretizado, es la siguiente

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad [4.7]$$

fruto del equilibrio entre fuerzas elásticas, inerciales y viscosas. Donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente. Estas matrices serán por lo tanto obtenidas mediante el MEF. El vector \mathbf{F} es un vector de fuerzas externas al sistema. Observar que la ecuación [4.7] se encuentra en el dominio del tiempo. Esta ecuación podrá resolverse por métodos de integración directa en el tiempo (Método de Newmark por ej.) o por superposición modal. Es de utilidad, debido a que sufre simplificaciones, expresar la ecuación [4.7] en el dominio de la frecuencia.

Aplicando la Transformada de Fourier a la ecuación se tiene,

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}]\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{P}(\omega) \quad [4.8]$$

donde la acción externa es de tipo armónico o de cualquier otro descompuesta en funciones armónicas mediante la Transformada de Fourier

$$\mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(t) e^{-i\omega t} dt \quad [4.9]$$

Podemos escribir la ecuación [4.8] como

$$\mathbf{S}(\omega)\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{P}(\omega) \quad [4.10]$$

siendo $\mathbf{S}(\omega) = [-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}]$ la matriz de impedancias o rigideces dinámicas del conjunto.

Ahora bien, enfocamos el problema desde el punto de vista de la subestructuración. Por un lado, tenemos el equilibrio dinámico en el subdominio estructural, Ω_s , dado por:

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_s \\ P_b \end{bmatrix} \quad [4.11]$$

siendo u_s^t, u_b^t los desplazamientos totales de los nodos pertenecientes a la estructura y a la interfase suelo-estructura respectivamente, y S_{bb}^S la submatriz de rigidez dinámica de la estructura relativa a los nodos ubicados en el área de contacto.

Por otro lado, el equilibrio en la interfase, Γ_b , responde a,

$$[S_{bb}^g][u_b^{t*} - u_b^g] = [P_b^*] \quad [4.12]$$

donde u_b^g es el movimiento de los nodos de la interfase sin presencia de la estructura, y S_{bb}^g es la matriz de rigidez dinámica, o impedancia, del suelo.

La compatibilidad y el equilibrio en la zona de interfase implican:

$$[P_b^*] + [P_b] = 0 \quad [4.13]$$

$$[u_b^{t*}] = [u_b^t] \quad [4.14]$$

De modo que se tiene,

$$[P_b] = -[S_{bb}^g][u_b^t - u_b^g] \quad [4.15]$$

que sustituyendo en [4.11] nos queda el sistema,

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb}^S + S_{bb}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_s \\ S_{bb}^g u_b^g \end{bmatrix} \quad [4.16]$$

El sistema de ecuaciones dado por [4.16] representa el equilibrio dinámico del conjunto suelo-estructura. Observar que el hecho de incluir el efecto del suelo en el comportamiento dinámico de la estructura se traduce en la suma de la submatriz correspondiente a la impedancia dinámica del terreno en los grados de libertad en la interfase, Γ_b ; y a la consideración de una fuerzas directamente aplicadas sobre la interfase, que no son mas que el movimiento del suelo multiplicado por la impedancia dinámica

del terreno.

Cabe comentar que esto último estará ligado a problemas de índole sísmica donde se estudie el primer paso del Método, y se analice así la respuesta del suelo ante un determinado tren de ondas, sin presencia de la estructura. El enfoque del problema desde el punto de vista del análisis o diseño de cimentaciones para máquinas, en el estudio del efecto que la vibración de estas presenta en el comportamiento estructural, elimina este desplazamiento del terreno. Tomando la ecuación [4.16], eliminando el movimiento del terreno, y retomando la notación de la sección anterior, se tiene,

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb} + Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad [4.18]$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0_{ss} & 0_{sb} \\ 0_{bs} & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad [4.19]$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0_{ss} & 0_{sb} \\ 0_{bs} & Z \end{bmatrix} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{P}(\omega) \quad [4.20]$$

donde $\mathbf{Z} \equiv \mathbf{Z}(\omega)$ es la matriz de impedancia del terreno que, como se apuntaba, relaciona las cargas y desplazamientos en la interfase; 0_{ss} , 0_{sb} y 0_{bs} son matrices nulas de tamaños $n_s \times n_s$; $n_s \times n_b$ y $n_b \times n_s$.

Antes de dar fin a este apartado conviene discutir sobre el tamaño de la matriz de impedancia del terreno. El tamaño de esta matriz depende del modelo de cimentación que se considere, que a su vez estará ligado a la tipología que presente la cimentación, en concreto, a su rigidez. Esto quiere decir que, si se trata de una cimentación de gran masa y con una suficiente rigidez como para aceptar la hipótesis de cimentación indeformable, el número de grados de libertad se reducirá inmediatamente (a 3 grados de libertad en el plano, o 6 en el espacio). Mientras que si la cimentación es considerada deformable se tendrán que tener en cuenta un mayor número de grados de libertad que logren representar adecuadamente el comportamiento de la misma. En el primer caso, estaríamos condensando el efecto del suelo sobre la estructura en un punto, elegido adecuadamente (normalmente el centro de la cimentación).

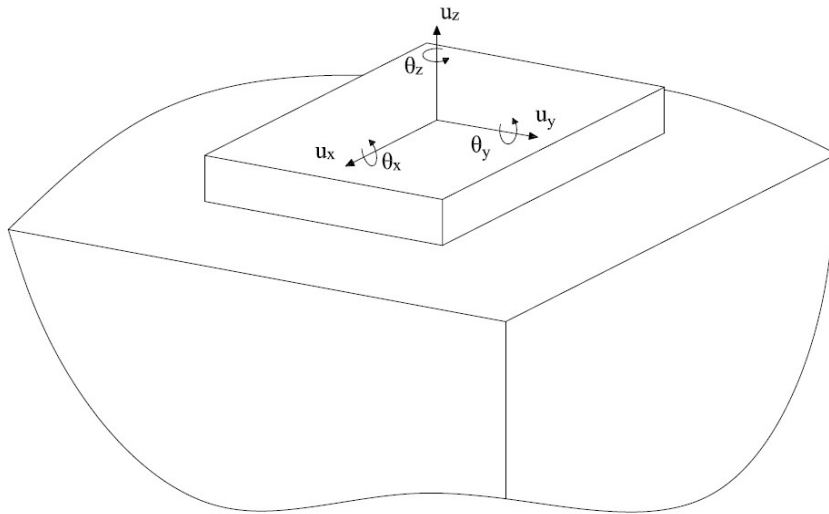


Figura 4.2. Grados de libertad en una cimentación rígida tridimensional.

4.3. Obtención de la rigidez dinámica de cimentaciones superficiales mediante el MEF.

Una vez planteadas las ideas anteriores, se dedica esta sección al estudio de la rigidez dinámica de cimentaciones superficiales rígidas mediante modelos de elementos finitos. El problema a resolver será, por lo tanto, generar modelos capaces de reproducir fielmente el comportamiento dinámico de una determinada cimentación superficial sometida a una carga de tipo armónico.

El objetivo principal que se persigue es poner de manifiesto la aplicación práctica de la teoría expuesta en capítulos anteriores sobre el Perfectly Matched Layer, comparando los resultados obtenidos mediante modelos que implementen este y aquellos que no lo hagan. Además de observar como varían los resultados cuando se alteran ciertos parámetros básicos como pueden ser el tamaño del modelo en cuanto a suelo modelizado se refiere, el espesor de la capa de PML o el amortiguamiento material del suelo.

El problema a resolver será el de una zapata rígida superficial, de planta cuadrada, sobre un semiespacio infinito elástico lineal, homogéneo e isótropo, de la cual se espera extraer su matriz de rigidez dinámica (o de la misma forma, su matriz de compliancia). Bajo hipótesis de zapata rígida y un modelo tridimensional, la matriz de compliancia dinámica será 6×6 , dado los seis grados de libertad de la misma. Tendrá un aspecto como el siguiente

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{P_x}^{u_x} & 0 & 0 & 0 & C_{M_y}^{u_x} & C_{M_z}^{u_x} \\ 0 & C_{P_y}^{u_y} & 0 & C_{M_x}^{u_y} & 0 & C_{M_z}^{u_y} \\ 0 & 0 & C_{P_z}^{u_z} & C_{M_x}^{u_z} & C_{M_y}^{u_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{M_x}^{\theta_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{M_y}^{\theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{M_z}^{\theta_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad [4.21]$$

donde en M_i $i=x,y,z$ se encuentran los momentos aplicados en el centro de gravedad de la cimentación, y la reducción dinámica de cualquier carga excéntrica que genere momento respecto del mismo; y en P_i las cargas aplicadas.

Se calcularán determinadas componentes de dicha matriz dado que se considera suficiente para el objetivo que se persigue: mostrar el funcionamiento del PML en modelos de elementos finitos. De cara a esto, se realizan modelos de elementos finitos sin PML, modelizando una fracción del suelo que se presenta como parámetro clave, e imponiendo condiciones de nulidad a los desplazamientos en los contornos del mismo. Por otro lado, se generan modelos de idénticas propiedades pero que integran una capa de elementos PML en los contornos. En la siguiente sección se detallarán las características de estos. Se espera pues, diferencias en los resultados debido a la capacidad que ofrece el PML para plasmar la condición de medio semi-infinito, y evitar la reflexión de las ondas que radian desde la zapata (foco de excitación).

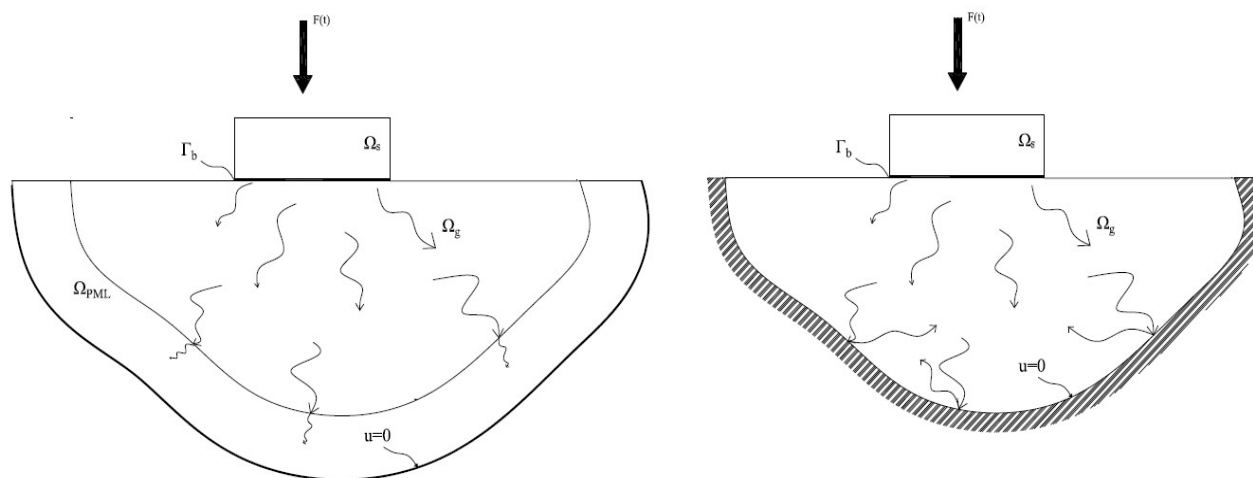


Figura 4.3. Esquemas de modelos con y sin capa de elementos PML en los contornos.

4.3.1. Descripción del modelo

Se emplea el software de elementos finitos ANSYS MECHANICAL APDL para la generación de los diferentes modelos. Los modelos de cálculo serán tridimensionales, y de forma simple, modelizan una determinada fracción del campo cercano a la estructura. La geometría de dicha fracción de suelo será cúbica, y sus dimensiones susceptibles de variar, de cara a un breve análisis paramétrico, como se indica en la Figura 4.4. Observar que el modelo que implementa elementos PML poseerá una capa del mismo volumen de suelo mallada con elementos PML. Dicha capa, Ω_{PML} , se encuentra de forma que envuelve el resto de volumen mallado como suelo, sin condición de PML, y actúa como una extensión de su contorno. Como ya se expuso en el capítulo dedicado a la teoría del Perfectly Matched Layer, las condiciones de contorno (valor nulo del campo de desplazamientos) se impondrán en el final de dicha capa de PML, mientras que en el modelo que no cuenta con esta se imponen en el contorno el mismo.

Generando los modelos surge una cuestión: incluir en el modelo la zapata, dotándola de una rigidez muy elevada y una masa nula; o no incluir esta en el modelo, y trabajar con los nodos de la interfase zapata-suelo.

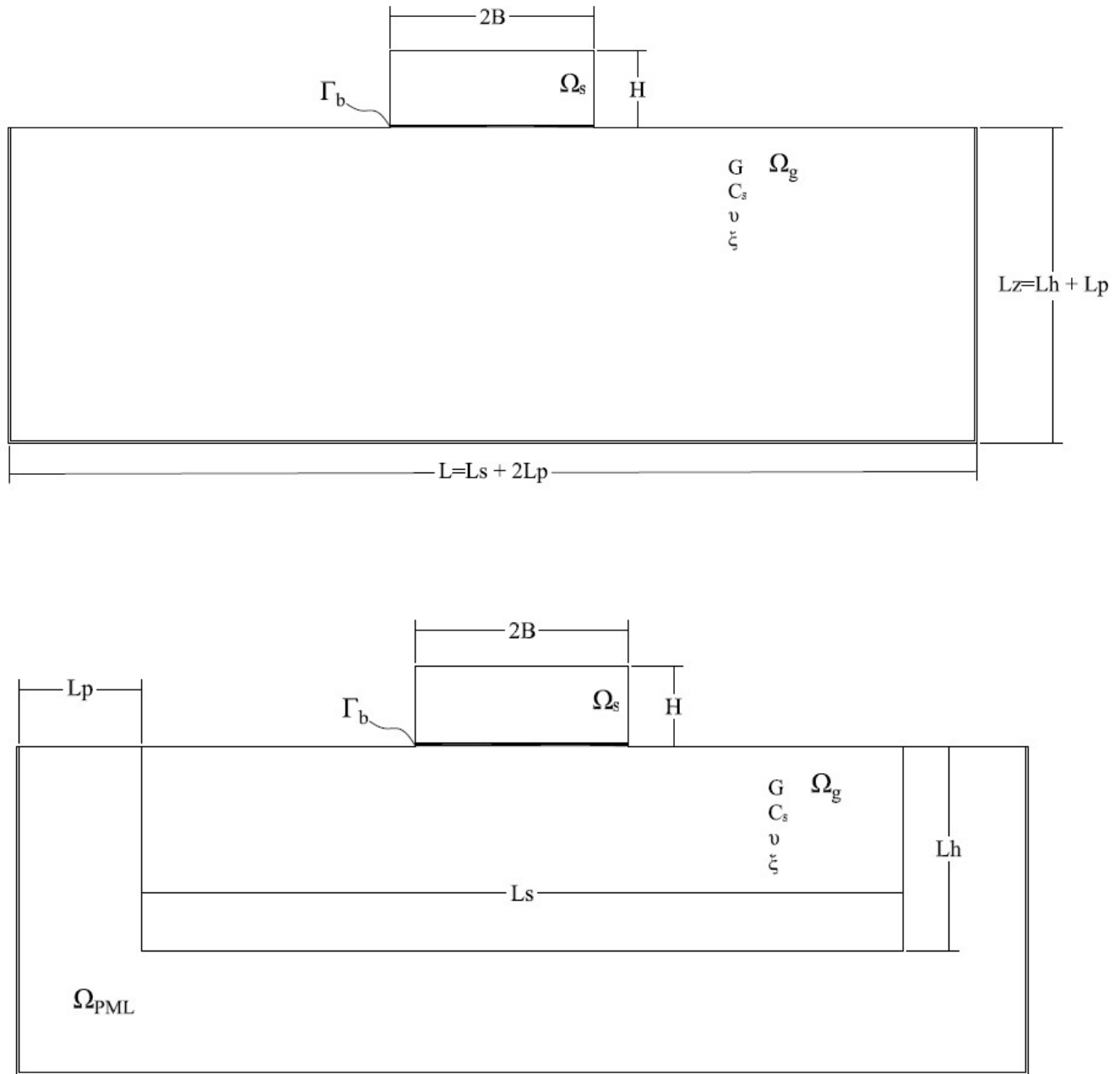


Figura 4.4. Esquema de los modelos a generar en ANSYS

Ante esta cuestión se decide generar ambos dos tipos de modelo, y observar si existen diferencias apreciables en los resultados. El primero de estos modelos, como los observados en la Figura 4.3 incluyen el sólido correspondiente a la zapata, el cual se caracteriza por una densidad nula y una rigidez muy elevada (en relación a la rigidez del suelo). Cualquier fuerza que se aplique sobre la zapata rígida será transmitida, por medio del área de contacto, al suelo. Debe tenerse en cuenta que se supone un contacto perfecto en la interfase suelo-cimentación, suponiendo que los puntos pertenecientes a cada medio en dicha interfase se comportan de igual forma.

Esto último invita a, dado que los puntos del área de contacto se moverán de idéntica forma, en lugar de aplicar la fuerza sobre la zapata, aplicar esta directamente sobre uno de los nodos de la interfase (el nodo que se encuentra bajo el centro de gravedad de la cimentación) y establecer las ligaduras necesarias entre los grados de libertad de dicho nodo y los de los demás nodos contenidos en esta área.

Se ha de puntualizar que, mediante cualquiera de los procedimientos anteriores, obtendríamos un resultado aproximado, y solo válido en un rango de deformaciones suficientemente pequeñas. Esto se debe a que, tal como se ha descrito, se supone un cierto acoplamiento entre los puntos correspondientes a la zapata y al suelo en el área de contacto. Esto obliga a que la cimentación, dado un desplazamiento vertical de la misma levante al suelo, y no se despegue del mismo. El problema se debería de afrontar desde el punto de vista de un problema de contacto no lineal.

Siguiendo con la idea anterior, si de la forma más general, organizamos los grados de libertad de todo el modelo u_T en dos conjuntos: los grados de libertad de los nodos contenidos en la interfase, u_b y el resto del modelo, u_R :

$$u_T = \begin{bmatrix} u_b \\ u_R \end{bmatrix} \quad [4.22]$$

si tomamos un nodo de la interfase como nodo maestro, hacemos que el resto de nodos adquieran un desplazamiento que depende de este, mediante las ecuaciones necesarias, de la forma

$$u_b = T u_M \quad [4.23]$$

donde T es la matriz de relaciones cinemáticas, u_b es un vector de tamaño $n_b * N \times 1$ y u_M es un vector que contiene los grados de libertad del nodo maestro, de tamaño $N \times 1$, con n_b el número de nodos en la interfase y N el número de grados de libertad de cada nodo.

La generación de la matriz T , o lo que es equivalente, las ecuaciones de ligadura cinemáticas, se realizan con un breve código de MATLAB (Código 2 Anexo) que devuelve las ecuaciones mediante los comandos de APDL necesarios. Una vez definida la geometría, cabe comentar su modelización en ANSYS en cuanto a elementos y materiales empleados en el mismo.

Por un lado, los modelos se realizan con elementos tridimensionales, concretamente el elemento **SOLID185** de ANSYS. Este es un elemento sólido 3D de 8 nodos, con 3 grados de libertad (traslaciones) por nodo: UX, UY, UZ. ($N = 3$) Este elemento se empleará para mallar el volumen correspondiente al suelo, además de la capa de PML, dado que el elemento permite implementar esta formulación. Observar que, según se apunta en el *Mechanical APDL Theory Reference*, el elemento PML empleará funciones de atenuación parabólicas.

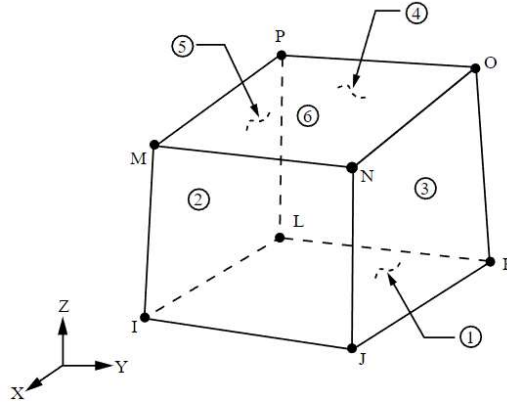


Figura 4.5. Esquema geométrico del elemento SOLID185

El mallado de los diferentes volúmenes se hará procurando la regularidad, es decir, se dispondrán elementos de geometría hexaédrica, lo que permite un mejor control del modelo en lo que se refiere a acoplamiento de grados de libertad, variación de los parámetros, etc. (ver Figura 4.6)

Por otro lado, en cuanto a las propiedades de los materiales tanto el suelo, como la zapata (en los modelos donde se incluya) serán modelizados como medios elásticos, homogéneos e isótropos. Para el modelo que incluye la zapata, esta se dotará de las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} E_{cim} &= 1e20 \text{ [N/ m]} \\ \nu_{cim} &= 0.2 \\ \rho_{cim} &= 0 \text{ [Kg/m}^3\text{]} \end{aligned}$$

donde E_{cim} es el módulo de Young, ν_{cim} el coeficiente de Poisson y ρ_{cim} la densidad. Como se observa, se le atribuye una gran rigidez mediante un modulo de Young muy elevado.

Para el suelo, se debe aclarar que, salvo el amortiguamiento, todas las propiedades del suelo se mantendrán constantes. Esto es debido a que los resultados se expondrán de forma adimensional (se detalla esto adelante) donde se adimensionaliza mediante las propiedades del suelo, por lo que una variación en estas carece de relevancia. Distinto es para el amortiguamiento, propiedad la cual no se emplea para adimensionalizar, y que se variará para analizar la influencia en los resultados. Recordar lo comentado con anterioridad: en el suelo tendrán efecto los amortiguamientos de radiación y el propio amortiguamiento del material, ξ .

El suelo se caracterizará por las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} C_s &= 200 \text{ [m/s]} \\ \nu_g &= 0.3 \\ \rho_g &= 1750 \text{ [Kg/m}^3\text{]} \end{aligned}$$

siendo C_s la velocidad de propagación de las ondas de corte en el suelo, ν_g el coeficiente de Poisson en el suelo, y ρ_g la densidad. De la velocidad de propagación de las ondas de corte y la densidad del medio se

obtiene el módulo de elasticidad transversal o módulo de corte del terreno de acuerdo a:

$$C_s = \sqrt{\frac{G_g}{\rho_g}} ; G_g = 70e6 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

En cuanto al amortiguamiento del suelo, este adquirirá diferentes valores (se detalla en adelante) de cara a observar la posible influencia que tenga este parámetro en los resultados obtenidos.

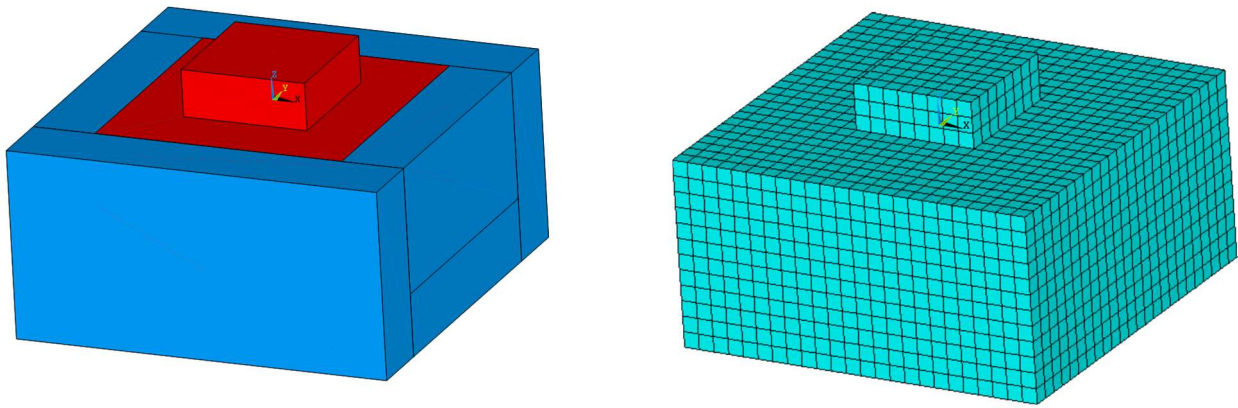


Figura 4.6. Volúmenes y mallado del modelo que incluye la zapata.

4.3.2. Obtención de los resultados: compliancia vertical.

Una vez definido el modelo y materiales, debemos realizar el análisis pertinente. Se procede en la presente sección a obtener la compliancia vertical de la zapata. Para ello se realizará un análisis armónico con el módulo de ANSYS *Harmonic Analysis*, en el que se resolverá la ecuación

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{C}(\omega)\mathbf{P}(\omega) \quad [4.24]$$

haciendo nula toda componente de $\mathbf{P}(\omega)$ excepto P_z , la ecuación se reduce a,

$$\mathbf{u}_z(\omega) = \mathbf{C}_{p_z}^{u_z}(\omega) \mathbf{P}_z(\omega) \quad [4.25]$$

donde se aplica una sola fuerza nodal en el nodo correspondiente al centro de la zapata (en el modelo que la incluya) o en el nodo maestro de la interfase (en el modelo que no incluya la zapata), llamémoslo M , en dirección Z , dada por:

$$\mathbf{P}_z(\omega) = P_z^M(\omega) = -1 [N]$$

Extrayendo los desplazamientos de dicho nodo obtenemos la componente de la matriz de compliancia deseada. Observar que la fuerza aplicada en este nodo se distribuye en todos los nodos del área de contacto bien a través de la rigidez de la zapata modelizada, o a través de las ecuaciones de ligadura que igualan el desplazamiento de estos nodos con el nodo donde se aplica.

El primer resultado que se espera es una comparativa entre el comportamiento obtenido mediante el uso de elementos PML en los contornos, y el obtenido sin ello. En la Figura 4.6 se puede apreciar el resultado obtenido para la compliancia vertical en el modelo sin PML, mientras que la figura () recoge el resultado correspondiente a exactamente el mismo modelo, pero empleando elementos PML en los contornos.

Se representa la compliancia vertical (parte real e imaginaria) frente a la frecuencia adimensional a_o , dada por:

$$a_o = \frac{\omega B}{C_s}$$

Siendo B el semilado de la cimentación y C_s la velocidad de propagación de las ondas de corte en el terreno.

Las dimensiones de la cimentación no son de interés dado en análisis adimensional de los resultados. Si bien, se modelizan zapatas cuadradas de cuatro metros de lado. La compliancia vertical de la cimentación es función de la forma en planta de esta, es decir, presentarán comportamientos diferentes aquellas que sean circulares, rectangulares o de forma arbitraria.

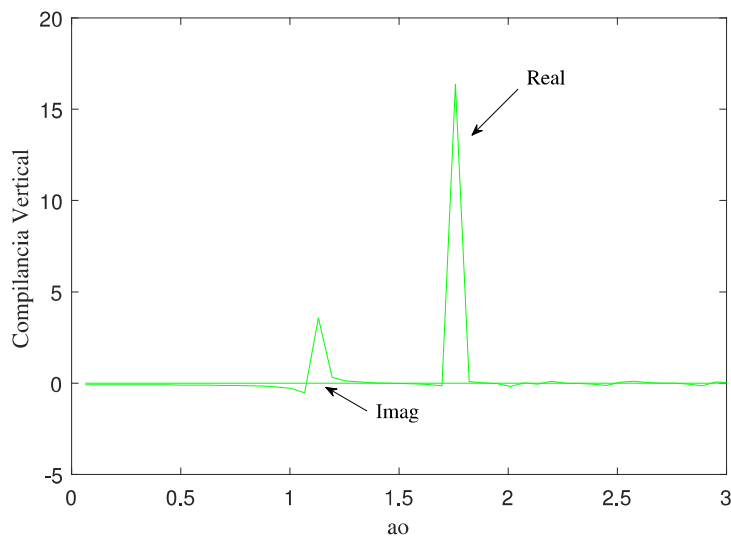


Figura 4.7. Compliancia vertical obtenida mediante el modelo sin PML

Como puede observarse el comportamiento que exhibe cada uno es radicalmente diferente. En el modelo sin PML el desplazamiento vertical de la cimentación, para cada frecuencia, se encuentra en fase o desfasada $\pi/2$ con la misma, esto implica una parte imaginaria nula. No ocurre esto en el modelo que implementa elementos PML. El primero de estos modelos no es capaz de permitir la suficiente propagación de las ondas que se generan al excitar la cimentación que, al incidir en los bordes rígidos del mismo, producen reflexiones. Estas ondas que se reflejan provocan un comportamiento totalmente alejado de la realidad como bien se puede observar.

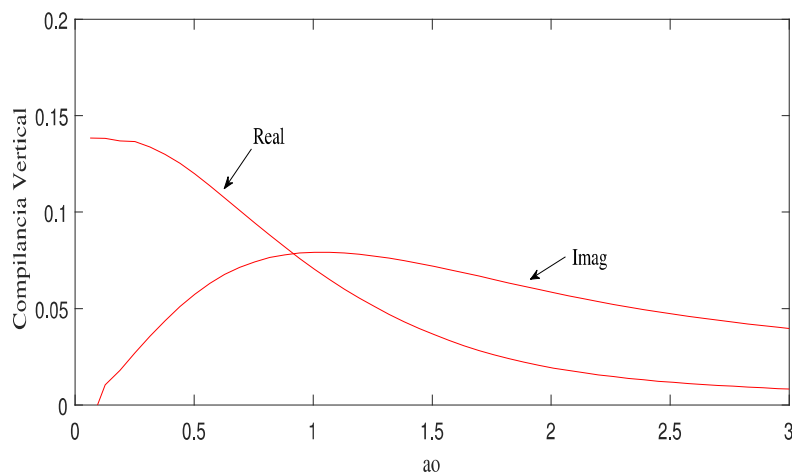


Figura 4.8. Compliancia vertical obtenida mediante modelo con PML. $L_p=3\text{ m}$; $L_s=8\text{ m}$; $B=2\text{ m}$; $L_h=4\text{ m}$

En el segundo, la perturbación que se propaga por el medio se encuentra con un medio, de características singulares, que logra atenuar dicha perturbación en un espacio reducido. Esto evita que se produzcan dichas reflexiones y que el comportamiento sea mucho mas natural. Esto que se afirma puede observarse en las Figura 4.8, donde se aprecia la deformación del suelo para una misma

frecuencia, en ambos modelos. En el modelo que implementa PML podemos apreciar como la perturbación se propaga de forma natural alejándose del foco que la provoca; mientras que en el segundo se aprecia claramente un comportamiento irregular, fruto de estas reflexiones.

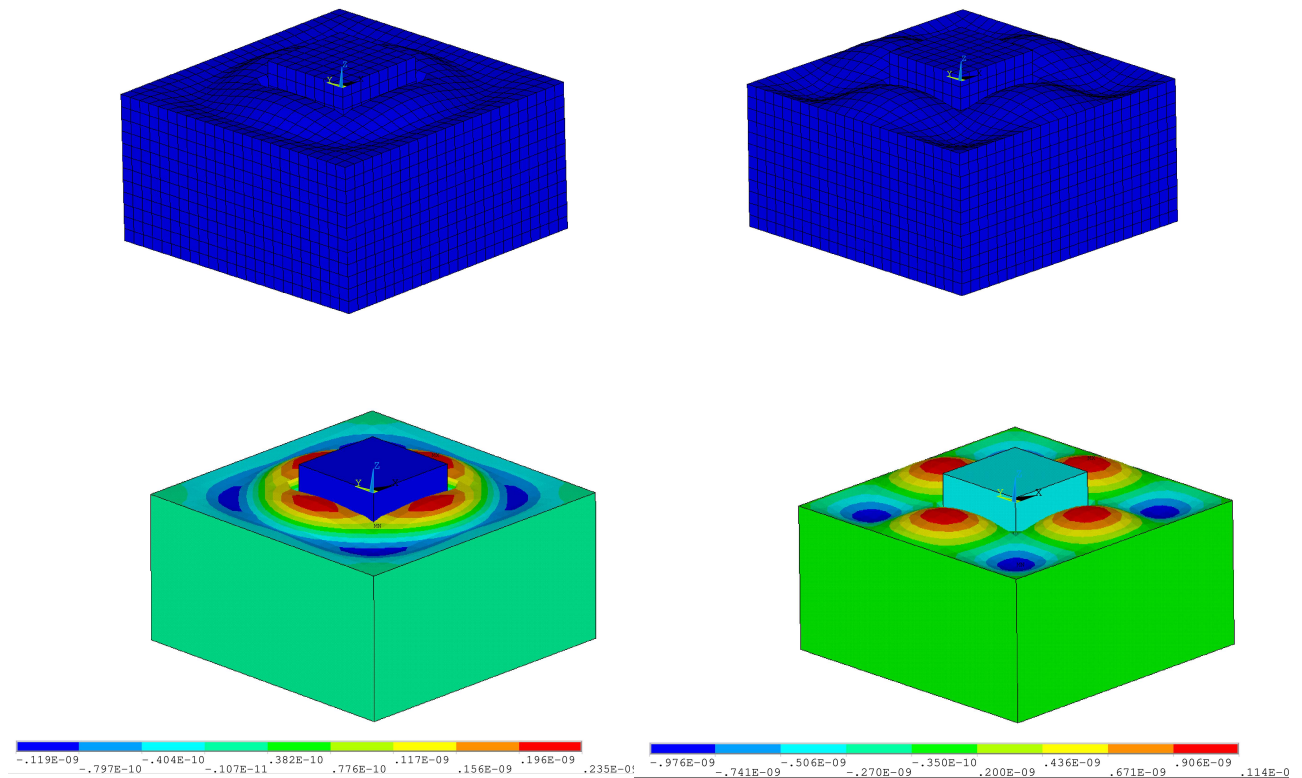


Figura 4.9. Deformada (arriba) y solución nodal para el desplazamiento vertical (U_z) (abajo), para una misma frecuencia, a la izquierda en el modelo con PML, a la derecha en el modelo sin PML.

Otra cuestión de interés es conocer si existen grandes diferencias en los resultados obtenidos mediante un modelo que incluya la zapata, dotándola de gran rigidez, y otro modelo que emplee el acoplamiento de grados de libertad que se comentaba. A su vez, conviene conocer igualmente las diferencias existentes entre suponer, en el área de contacto, un acoplamiento de todos los grados de libertad por nodo (recordar que son las tres traslaciones) o contacto "soldado", o suponer que la cimentación y suelo compatibilizan los desplazamientos verticales únicamente, esto es, que existen movimientos relativos entre cimentación y suelo, en el plano de contacto. Los resultados de los diferentes modelos (ver Figura 4.9) ponen de manifiesto un comportamiento prácticamente idéntico entre el modelo que incluye zapata y el que acopla todos los grados de libertad. Sin embargo, existe una sutil diferencia con aquel que acopla sólo el desplazamiento vertical.

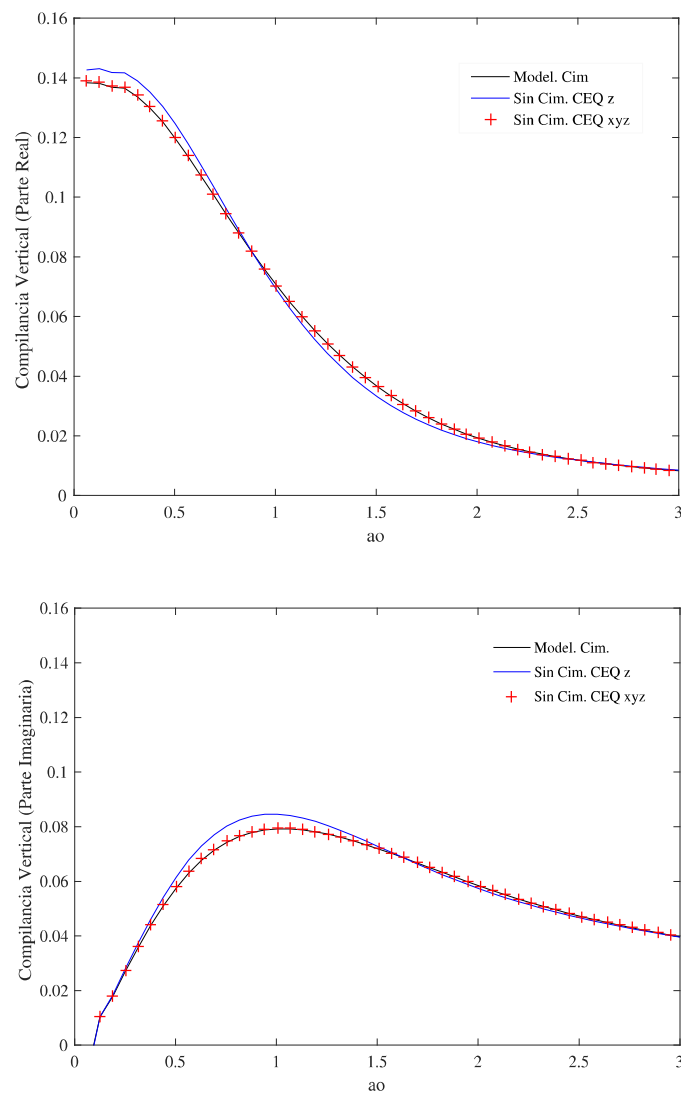


Figura 4.10. Resultados de compliancia vertical para el modelo que incorpora la zapata (Model. Cim), y las diferentes condiciones en la interfase, para el que no la incorpora: acoplamiento del grado de libertad de desplazamiento vertical (CEQ z) y acoplamiento de los tres grados de libertad de desplazamiento (CEQ xyz).

De cara a contrastar de alguna forma los resultados mostrados, parece interesante establecer una comparación de estos con resultados obtenidos anteriormente por otros. Diversos autores han dedicado tiempo a estudiar el comportamiento dinámico de cimentaciones, de modo que existen numerosas fuentes donde se pueden encontrar soluciones al problema que se trata aquí. Se han tomado los resultados obtenidos por Domínguez (1978) y Wong & Luco (1976) para la compliancia vertical de zapatas cuadradas superficiales, asumiendo estas rígidas. Cabe comentar que estos resultados fueron obtenidos mediante el Método de los Elementos de Contorno.

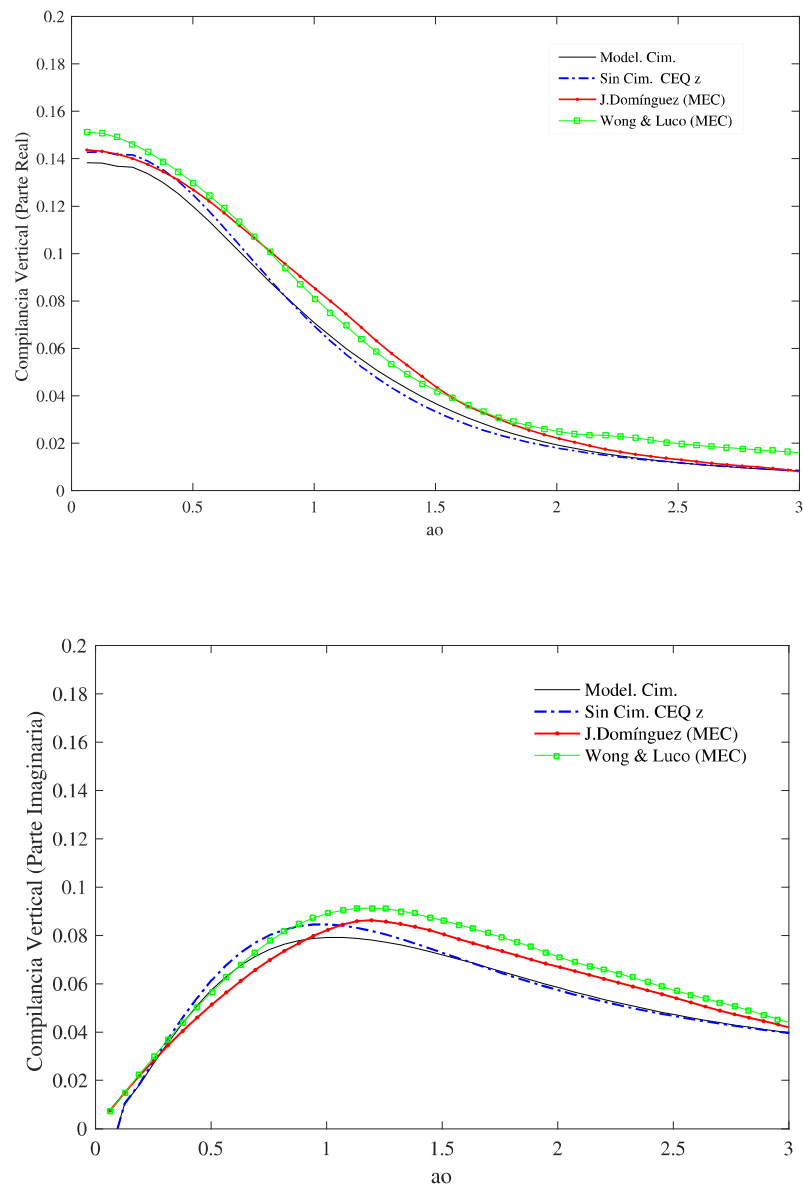


Figura 4.11. Resultados para la compliancia vertical obtenidos por otros autores, y obtenidos en este trabajo para los modelos con cimentación (Model. Cim.) y sin cimentación acoplado el grado de libertad de desplazamiento vertical (CEQ z)

No siendo idénticos, la tendencia de los resultados es muy similar. Si bien, el modelo que solo establece el acoplamiento vertical en el área de contacto coincide con los valores de J. Domínguez (1978) en los extremos, el modelo que acopla todos se aleja sutilmente de este.

Hasta ahora, las propiedades del suelo, como se adelantó, se han mantenido constantes. Recordar que en la respuesta no entra en juego ningún tipo de amortiguamiento material, más allá del amortiguamiento de radiación característico del fenómeno. Es interesante observar como puede influir un determinado amortiguamiento en la respuesta dinámica de la cimentación superficial. Para ello se extraen resultados considerando amortiguamientos del 5 y 10% en el suelo.

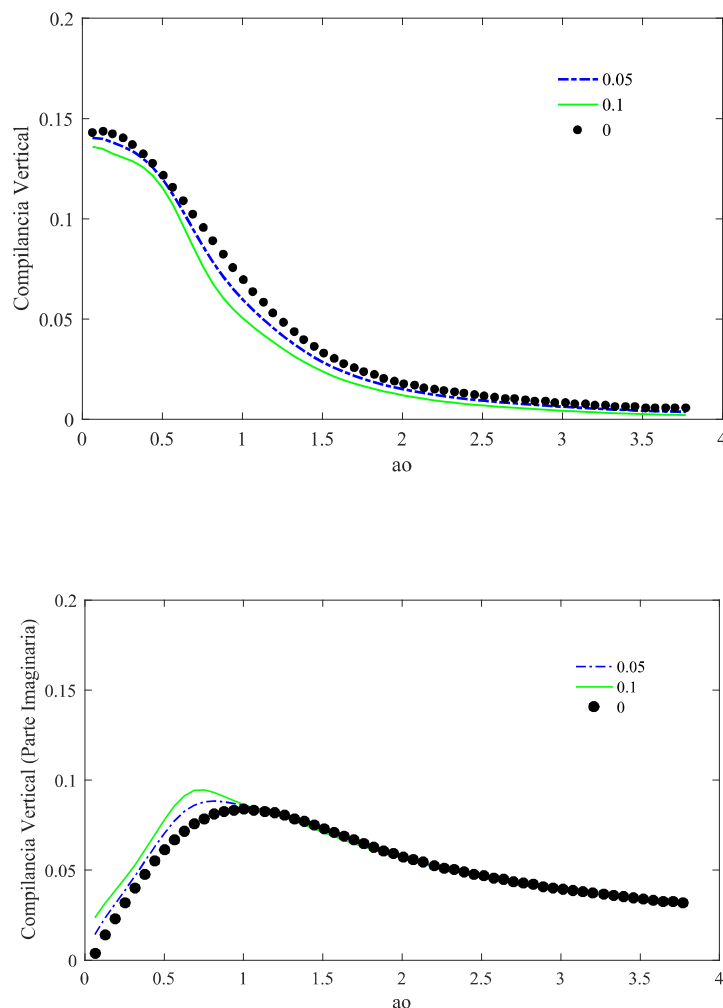


Figura 4.12. Resultados obtenidos para la compliancia vertical, empleando diferentes valores de amortiguamiento

Llegados a este punto, vez analizados los resultados expuestos, podemos concluir que el modelo que incluye Perfectly Matched Layer en sus contornos ofrece un buen comportamiento. Ahora bien, como ya se adelantó, se considera interesante realizar un breve análisis paramétrico del modelo. Esto es, observar el comportamiento que se obtiene cuando se varían los parámetros básicos. Estos parámetros, de carácter geométrico, serán el espesor de la capa PML, L_p ; y el tamaño de suelo modelizado dado por L_s . Se considera un valor de L_h igual a la mitad de L_s . Esto nos proporciona una idea de cómo generar modelos con PML de forma adecuada.

Se observa que variaciones en el tamaño del suelo en el modelo no proporcionan resultados muy diferentes, siendo estos prácticamente idénticos (Figura 4.12). Sin embargo, los resultados son tremendamente sensibles al espesor de la capa PML, como puede observarse en las Figuras 4.13 y 4.14.

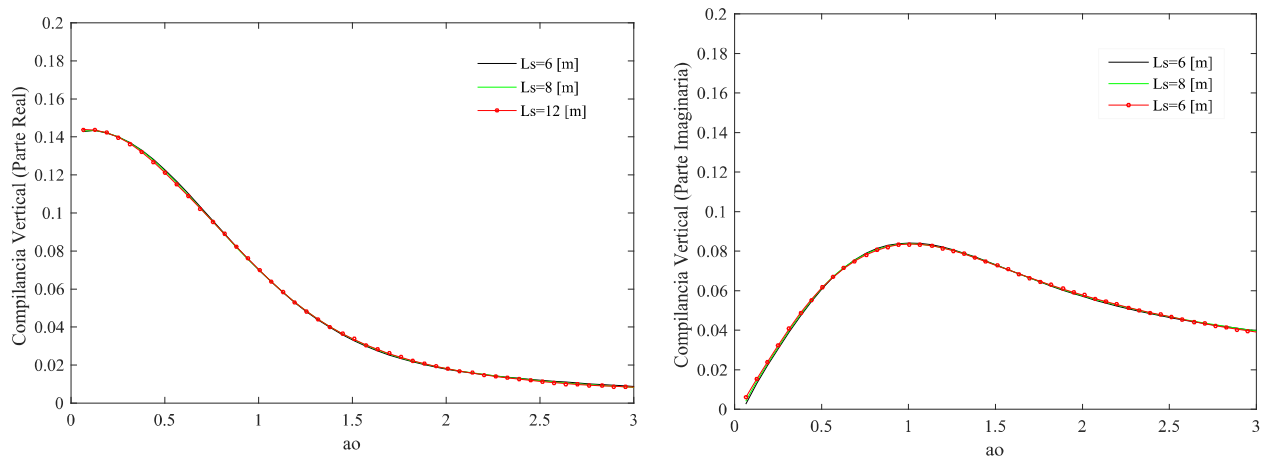


Figura 4.13. Resultados obtenidos para diferentes tamaños de suelo modelizado, L_s .

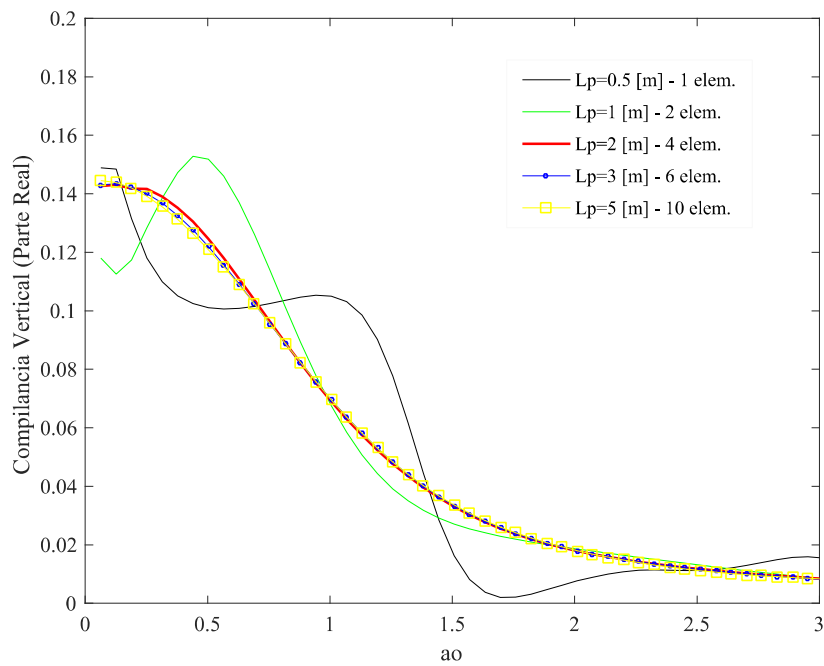


Figura 4.14. Resultados (parte real de la compliancia), para los diferentes espesores de capa PML empleados.

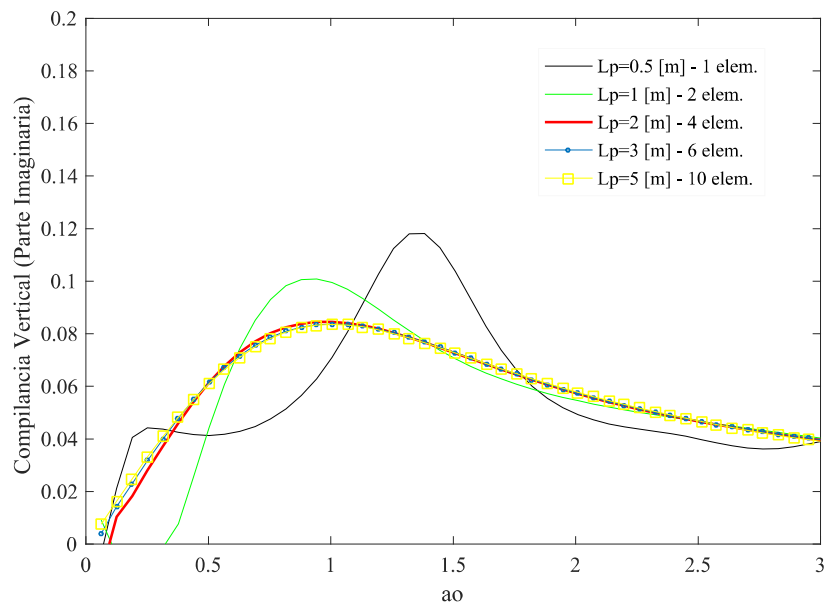


Figura 4.15. Resultados (parte imaginaria de la compliancia) para los diferentes espesores de capa PML empleados.

Nótese que además del espesor de la capa PML se indica el número de elementos con que esta se malla. Este hace referencia al número de elementos en los que la capa se discretiza en dirección perpendicular al lado del modelo al cual se encuentra adyacente. (ver Figura 4.17).

Puede resultar engañoso observar el comportamiento obtenido en función del espesor de la capa PML, dado que esto no nos indica, de forma independiente, la influencia que pueda tener el tamaño de mallado en la misma. Es decir, dado un espesor de capa constante, cómo influye el número de elementos con que se discretiza esta. Esto mismo se recoge en las Figuras 4.15 y 4.16, donde para un espesor de 0.6 metros, se varía el tamaño de mallado, obteniendo uno, dos o tres elementos en la capa.

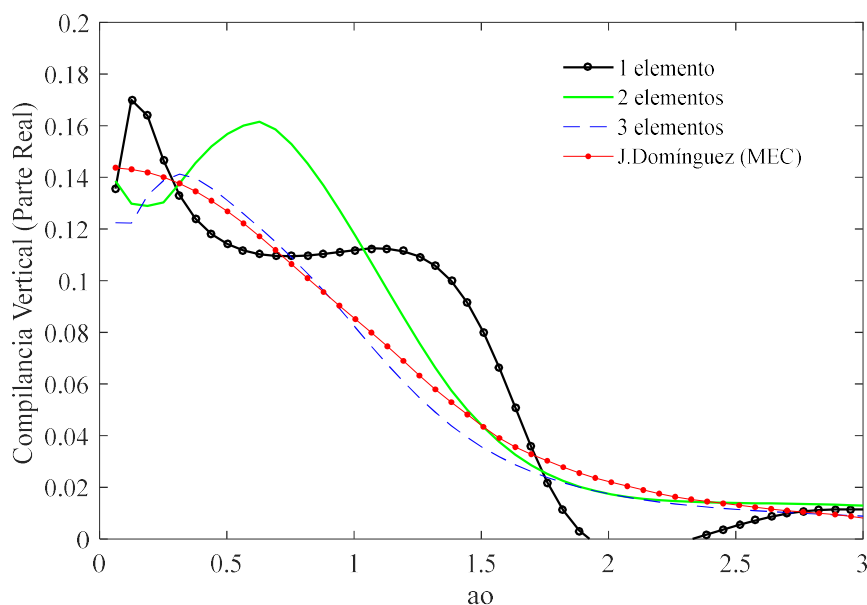


Figura 4.16. Resultados (parte real de la compliancia), obtenidos para diferente número de elementos en la capa PML.

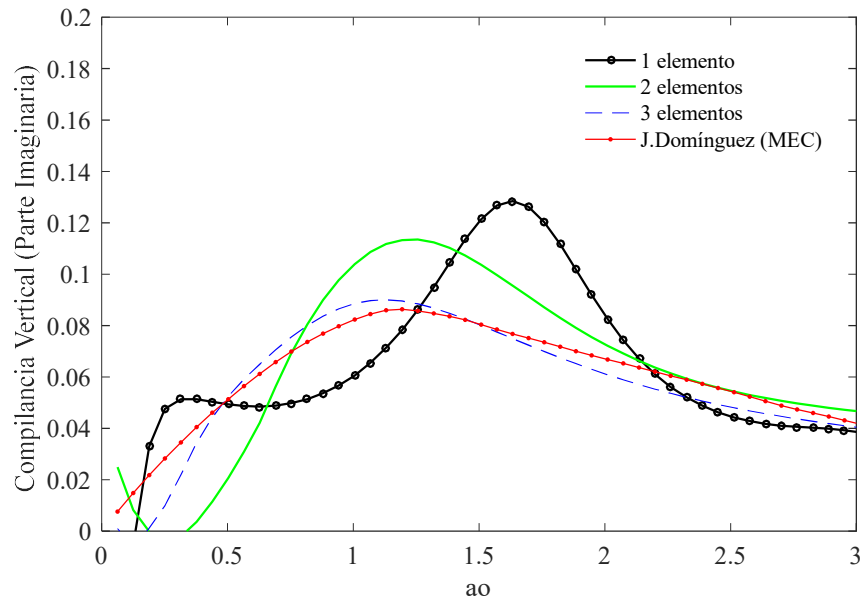


Figura 4.17. Resultados (parte imaginaria de la compilancia), obtenidos para diferente número de elementos en la capa PML.

Si bien, se pone de manifiesto como el número de elementos en que se discretiza la capa PML es crucial en el comportamiento obtenido, independientemente del espesor que se de a dicha capa.

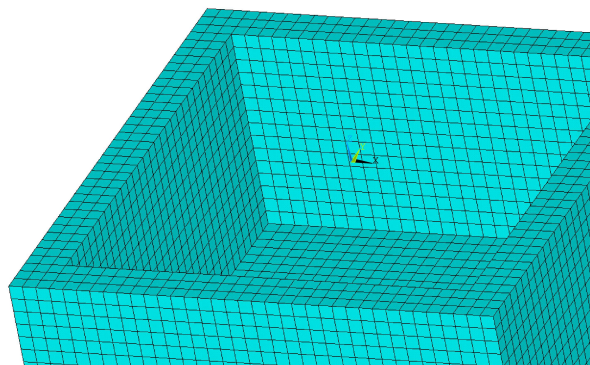


Figura 4.18. Capa PML con 3 elementos.

4.3.3. Obtención de los resultados: impedancia al giro.

El procedimiento a seguir es idéntico al anterior. Se determina ahora la rigidez dinámica o impedancia de la zapata al cabeceo. Para obtener esta, de nuevo se ejecuta un análisis armónico en ANSYS, donde ahora se aplica a la zapata un momento según uno de los ejes contenidos en su plano, obteniendo la respuesta de la misma, es decir el giro. Con ello somos capaces de determinar la impedancia de la misma a este movimiento.

La ecuación a resolver es del tipo,

$$\theta_x = C_{Mx}^{\theta_x} M_x \quad [4.26]$$

o de forma equivalente,

$$M_x = K_{Mx}^{\theta_x} \theta_x \quad [4.27]$$

donde

$$K_{Mx}^{\theta_x} = inv \left(C_{Mx}^{\theta_x} \right) \quad [4.28]$$

es la rigidez dinámica o impedancia al giro según el eje x. La razón por la que se exponen resultados en forma de impedancia en lugar de compliancia como en el caso anterior, es el establecer comparación de los resultados con los de otros autores que así lo exponen.

Debido al elemento empleado para la modelización del suelo (SOLID185), el cual solo posee grados de libertad de traslación y no giro, para conseguir someter a la zapata a un momento se ha empleado, para la zona de interfase, elementos tipo placa.

La imposibilidad de aplicar momentos a los nodos de estos elementos lleva a modelizar la zona de la interfase cimentación-suelo mediante elementos SHELL181. Estos elementos implementan la teoría de placas con deformación por cortante (Reissner-Mindlin). Dotando a estos de una elevada rigidez y aplicando ecuaciones de ligadura entre los nodos correspondientes a estos y los correspondientes al suelo, en la misma posición geométrica, conseguimos recrear un comportamiento rígido al giro de la interfase.

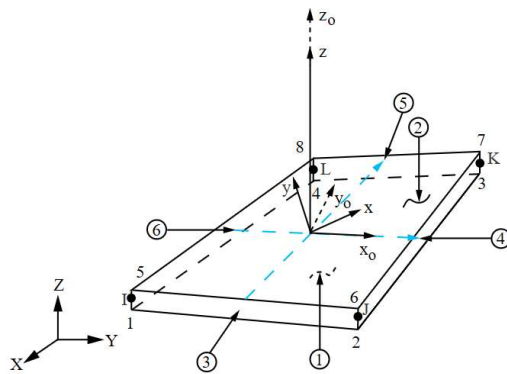


Figura 4.19. Esquema geométrico del elemento Shell181 de ANSYS

El modelo cuenta con un suelo de características idénticas al anterior (ver sección 4.3.2) y sin considerar ningún tipo de amortiguamiento en el mismo. La zona de interfase se modeliza con los elementos descritos, dotándola de densidad nula.

En primer lugar, como se hizo en la sección anterior, se muestra el resultado del análisis sin considerar elementos PML en el modelo. Se observa de nuevo (Figura 4.20) un comportamiento poco natural: de nuevo la parte imaginaria presenta un valor nulo. Ante esto el razonamiento es el mismo que anteriormente: el modelo que no implementa PML no es capaz de reproducir correctamente la propagación de las ondas y así mismo el amortiguamiento asociado a la radiación.

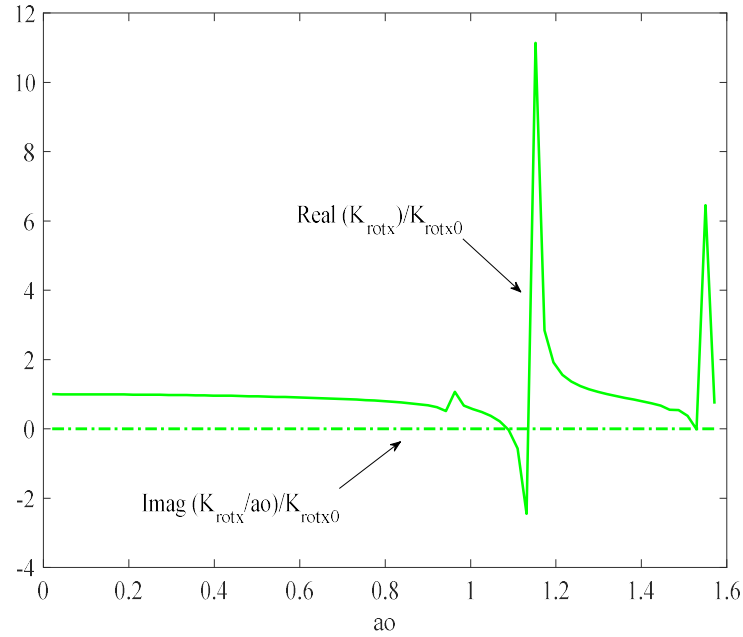


Figura 4.20. Resultados obtenidos para la impedancia al giro mediante modelo sin PML.

Se representa la parte real rigidez dinámica $K_{Mx}^{\theta_x} \equiv K_{rotx}$ adimensionalizada a la rigidez estática K_{rotx0} . Esta última adquiere un valor de $1.1033e+09 \left[\frac{Nm}{rad} \right]$; y la parte imaginaria adimensionalizada a la frecuencia adimensional ao y a la rigidez estática igualmente.

Para el modelo con PML el comportamiento de nuevo se presenta radicalmente diferente (ver Figura 4.20), debido a lo ya razonado con anterioridad. Se presentan los resultados junto con los obtenidos por otros autores con anterioridad (J. Domínguez (1978) y Veletsos & Wei (1971)).

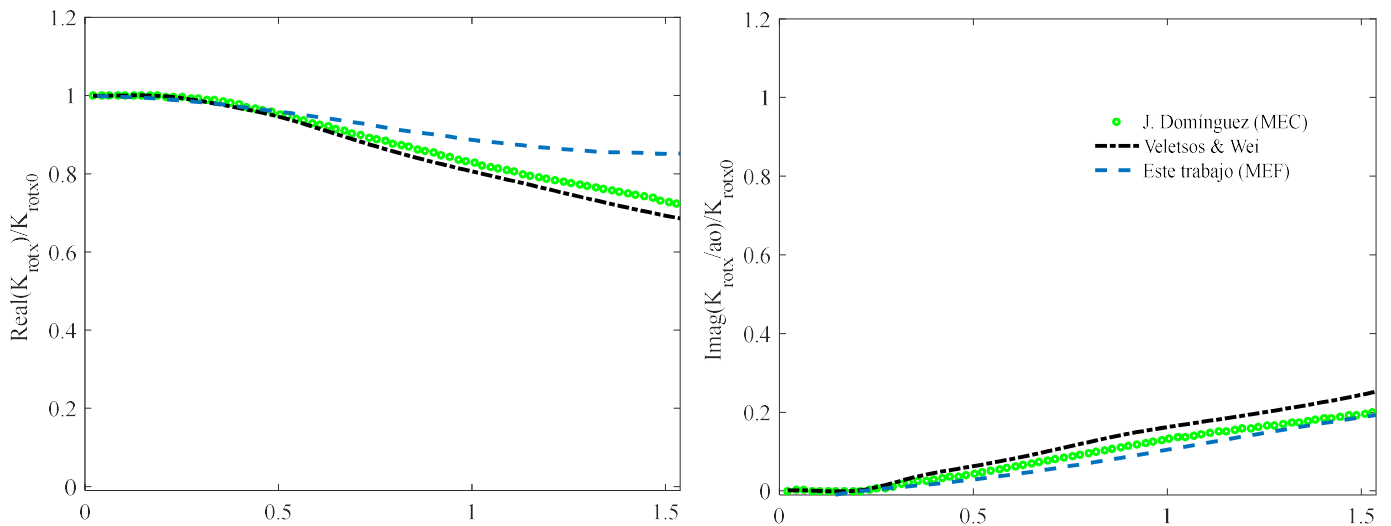


Figura 4.21. Resultados para la impedancia al giro empleando modelos con PML. Comparativa con los resultados obtenidos por otros autores.

Como se ha comentado, los resultados anteriores han sido obtenidos sin considerar ningún amortiguamiento propio del suelo. Se incluyen en el suelo amortiguamientos del 2 y del 5%, observando (Figura 4.21) poca diferencia para la parte real de la impedancia dinámica, mientras que una gran diferencia en la parte imaginaria de esta. Observar como, a mayor amortiguamiento, tal como la frecuencia disminuye, la parte imaginaria de la impedancia crece abruptamente.

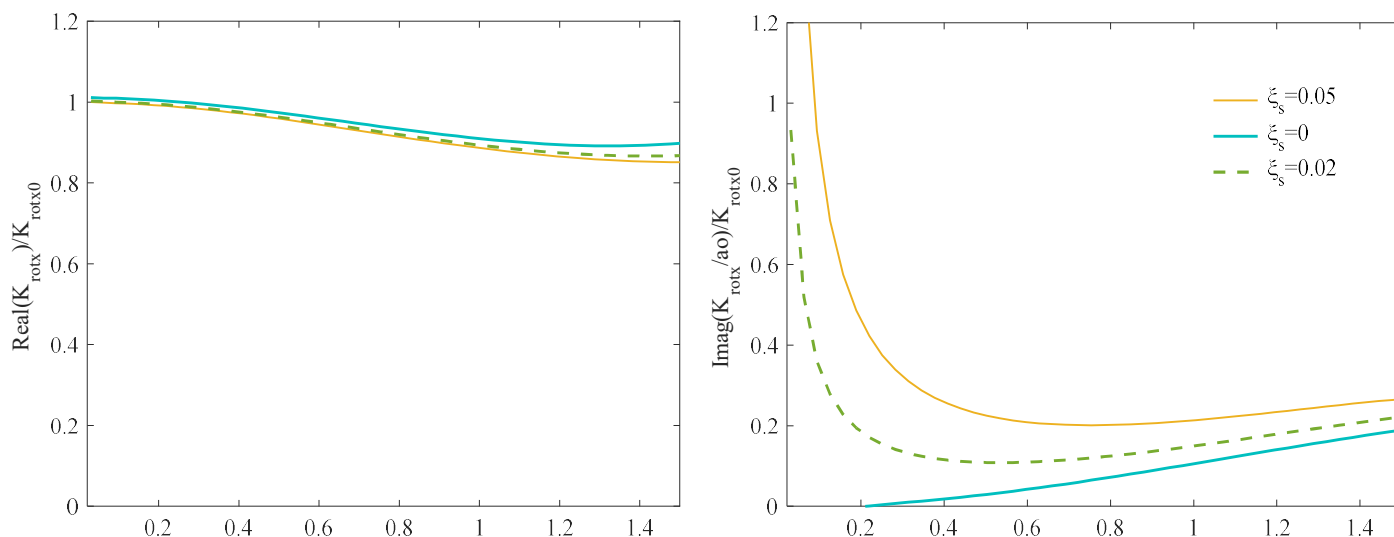


Figura 4.22. Resultados obtenidos para la impedancia al giro empleando diferentes valores del amortiguamiento en el suelo.

4.4. Conclusiones

Es directo observar las diferencias que presentan los resultados de los diferentes modelos. La respuesta obtenida del modelo con contornos rígidos no se aproxima de ningún modo a la realidad, revelando el carácter rígido del modelo o el llamado *efecto caja*: la parte real presenta un pico muy acentuado, mientras que la parte imaginaria se obtiene nula. Esto último es de interés dado que como se comentaba es esta parte imaginaria la que representa esa componente de amortiguamiento asociado no al propio carácter material del suelo, sino al efecto de la radiación de las ondas en el medio: que como puede razonarse no es representado por este modelo. La inclusión de los elementos PML en la capa externa al modelo soluciona con creces este problema: el comportamiento se presenta radicalmente diferente, y se aproxima notablemente al obtenido por otros autores con anterioridad. Esto lleva a afirmar que la disposición de este tipo de elementos proporciona en el análisis establecido buenos resultados a la hora de modelizar el medio semi-infinito.

Destacar la importancia de un suficiente mallado de la capa PML: se ha observado una notable sensibilidad al número de elementos empleados en dicha capa, obteniéndose buenos resultados para un número de elementos superior a tres.

En cuanto al efecto del amortiguamiento material del suelo, este provoca una sutil disminución en la parte real de la compliancia vertical, y un aumento de la parte imaginaria. Para la rigidez al giro el amortiguamiento conlleva una disminución de la parte real, y un aumento notable de la parte imaginaria, la cual presenta un crecimiento muy elevado a frecuencias bajas.

5 ENFOQUE DEL PROBLEMA MEDIANTE LOS ELEMENTOS INFINITOS

5.1 Introducción

Como ya se adelantó anteriormente, se presenta aquí otra alternativa a la resolución de problemas en medios semi-infinitos. En este caso este enfoque no es más que una extensión del Método de los Elementos Finitos que pretende, de alguna forma, plasmar el comportamiento del medio infinito en un modelo que no lo es. Este enfoque es debido a P.Bettess (1977) , y R.F.Ungless (1973), quienes formulan los elementos infinitos por primera vez.

Estos elementos se presentan de gran utilidad, entre otros motivos debido a que conceptualmente distan poco de los elementos finitos habituales. Las diferencias entre estos se encuentran fundamentalmente en una extensión del elemento y las funciones de forma a emplear en ellos.

Los elementos infinitos (EI) no son más que una extensión de los elementos finitos habituales (EF). De este modo, se presentan de utilidad en la generación de modelos formados por ambos elementos acoplados (EF-EI). La idea es modelizar un medio infinito a partir de un dominio discretizado mediante EF, y que en lugar de imponer valores al campo de desplazamiento en sus bordes (condiciones de contorno habituales, y no reales), se establezcan en dichos bordes estos EI, que se encargarán de simular la extensión al infinito de los anteriores EF, obteniendo así soluciones más precisas. Estos elementos se han formulado para la resolución de diferentes problemas, así como problemas hidrodinámicos, acústicos, elastodinámicos...etc. Siendo estos últimos los de interés en este trabajo, de cara a la aplicación que se persigue: interacción suelo-estructura.

A partir de los primeros trabajos sobre esta formulación, se han desarrollado diferentes tipos de técnicas para generar elementos infinitos, que buscan obtener mejores resultados a cada problema en cuestión.

En lo que sigue se pretende presentar de forma breve la idea de partida de esta formulación y la base teórica en que se sustenta, de cara a adquirir una idea general que permita obtener una visión comparativa entre este y el método anteriormente presentado.

5.2 Base teórica

La idea tras la formulación de este tipo de elementos se puede resumir en dos conceptos: la extensión geométrica del elemento hacia el infinito en una o varias direcciones y la aproximación de campo básico de modo que este decaiga de alguna forma en dichas direcciones. Así mismo esto da pie a diferentes técnicas para la generación de elementos infinitos, conceptualmente diferentes, las cuales han sido estudiadas por diversos autores. En este capítulo se hará referencia a dos de ellas: Elementos Infinitos tipo Mapped (*Mapped type Infinite Element*) en lo que sigue, MIF y Elementos Infinitos de Atenuación (*Decay type Infinite Elements*), en lo que sigue, DIF.

De forma resumida, y previamente a ser desarrolladas las ideas, podemos apuntar las diferencias clave entre este tipo de elementos que, adelantando, se puede intuir que residen en las funciones de forma. Por un lado, los MIF emplean unas determinadas funciones de mapeo (*Mapping Functions*) con las que logran relacionar un dominio global aparentemente infinito con un dominio elemental finito. Mientras que los elementos tipo DIF parten de las funciones de forma habituales para, aplicándoles alguna transformación mediante otra función, obtener otras que logran exhibir el carácter atenuante que se busca.

5.3 Mapped Infinite Elements (MIF)

5.3.1 Caso unidimensional

Este primer enfoque trata de, a partir de un elemento definido hasta el infinito, en un sistema global, determinar la transformación del mismo a un sistema elemental finito. Para ilustrar esta idea se considera en primer lugar el caso unidimensional.

Considérese el dominio infinito unidimensional definido por la coordenada x , el cual define el elemento infinito de forma global. Es importante destacar que el EI se dispondrá adyacente al dominio discretizado por EF, el cual se intenta extender en sus bordes. Teniendo esto presente, debemos considerar la coordenada x_0 situada en el dominio discretizado mediante EF, y la cual se denomina *pole* o nodo de referencia. Este será fundamental en la definición de los EI de acuerdo a las diferentes geometrías del dominio donde se resuelve el problema, como se verá más adelante. El elemento se define a través de las coordenadas x_1, x_2 y x_3 la cual se dispone en el infinito.

La idea es transformar este elemento, a priori definido en un dominio infinito a uno finito, dado por la coordenada $-1 < \xi < 1$, tal como se puede apreciar en la Figura 5.1. La metodología para la transformación presentada aquí es debida a Zienkiewicz et al (1983), y se presenta de mucha utilidad dado su facilidad a la hora de implementarse en códigos de elementos finitos, sin necesidad de grandes modificaciones.

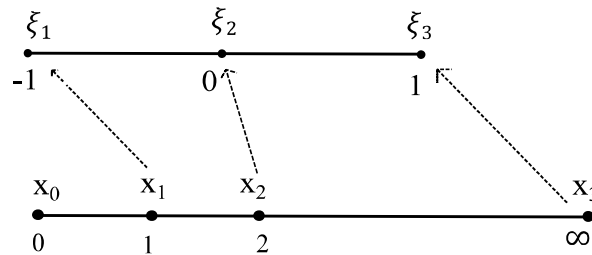


Figura 5.1. Esquema de relación para el caso unidimensional.

se propone la siguiente relación,

$$x = \overline{N}_0(\xi)x_0 + \overline{N}_2(\xi)x_2 \quad [5.1]$$

donde $\overline{N}_0(\xi)$ y $\overline{N}_2(\xi)$ son conocidas como *mapping functions*.

Donde se encuentran las siguientes expresiones para las mismas, ensayando polinomios cuadráticos en ξ ,

$$\overline{N}_o(\xi) = \frac{-\xi}{1-\xi} \quad [5.2]$$

$$\overline{N}_2(\xi) = 1 + \frac{\xi}{1-\xi} \quad [5.3]$$

De tal forma que [5.1] cumpla que,

$$\begin{aligned} \text{En } \xi = 1, \quad x &= \frac{\xi}{(1-\xi)}(x_2 - x_o) + x_2 = x_3 = \infty \\ \text{En } \xi = 0, \quad x &= 0x_o + 1x_2 = x_2 \\ \text{En } \xi = -1, \quad x &= \frac{x_o}{2} + \frac{x_2}{2} = x_1 \end{aligned}$$

Observar que la coordenada x_1 se toma en el punto medio entre el nodo de referencia x_o y la coordenada x_2 . De esta forma tenemos establecida la transformación geométrica del dominio infinito al finito. Si ahora consideramos una determinada función de forma definida en el dominio de la coordenada ξ , podríamos obtener la función transformada al dominio de x . Esto es habitual en el MEF, y se materializa a partir de la obtención del Jacobiano.

Tomamos una función de forma genérica dada por P , un polinomio en ξ como es habitual emplear en el MEF (que podría ser cualquiera de las funciones de forma empleadas habitualmente en la interpolación del campo básico),

$$P(\xi) = \rho_o + \rho_1\xi + \rho_2\xi^2 + \dots + \rho_n\xi^n \quad [5.4]$$

Antes de expresar [5.4] en función de x , tomamos la relación $\xi \leftrightarrow x$ dada por [5.1], [5.2] y [5.3] y la reescribimos de la forma,

$$x = x_o + \frac{2a}{(1-\xi)} \quad [5.5]$$

donde $a = x_1 - x_o = x_2 - x_1$.

Si además definimos r como la distancia entre una x genérica y el nodo de referencia x_o ,

$$r = x - x_o$$

escribimos [5.5] como

$$r = \frac{2a}{(1-\xi)} \quad [5.6]$$

y de la misma forma,

$$\xi = 1 - \frac{2a}{r} \quad [5.7]$$

De esta forma [5.6] y [5.7] representan la relación entre ambas coordenadas de forma más compacta y en función de r . Si bien, introducimos [5.7] en [5.4], obtenemos una nueva función de forma, expresada en la coordenada x como potencias inversas de r ,

$$P(r) = \beta_o + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \dots + \frac{\beta_n}{r^n} \quad [5.8]$$

Como se puede observar la función de forma del elemento infinito decrece con la coordenada r . Podemos controlar, mediante el término independiente β_o la convergencia del polinomio en el infinito, según interese en el problema a resolver. Así mismo si elegimos un término independiente nulo la función decrecerá hasta alcanzar un valor nulo en el infinito. Este comportamiento decreciente con potencias de r puede ser muy útil en la resolución de problemas cuyos fenómenos involucrados presenten dicho comportamiento. En el siguiente apartado donde se presenta la otra alternativa para conseguir elementos infinitos se comentará algo más sobre este aspecto, y como lograr otro tipo de comportamiento en las funciones de forma, de cara a fenómenos que no sean bien representados con el presente.

Ahora bien, dado que el punto correspondiente a x_o (polo) no es un nodo perteneciente al elemento infinito, conviene expresar las funciones en los nodos correspondientes a este (x_1 y x_2), de la forma:

$$x = M_1 x_1 + M_2 x_2 \quad [5.9]$$

donde M_1 y M_2 son las funciones de mapeo, que quedan de la forma,

$$M_1 = 2\overline{N}_o(\xi) = -\frac{2\xi}{1-\xi} \quad [5.10]$$

$$M_2 = \overline{N}_2(\xi) - \overline{N}_o(\xi) = \frac{1+\xi}{1-\xi} \quad [5.11]$$

Estas funciones adquieren un valor unidad en el nodo asociado, nulo en el opuesto, y tienden a infinito en el tercer nodo del elemento (x_3) el cual se sitúa en el infinito en la coordenada global, y en $\xi = 1$ en la local. Véase la Figura 5.2.

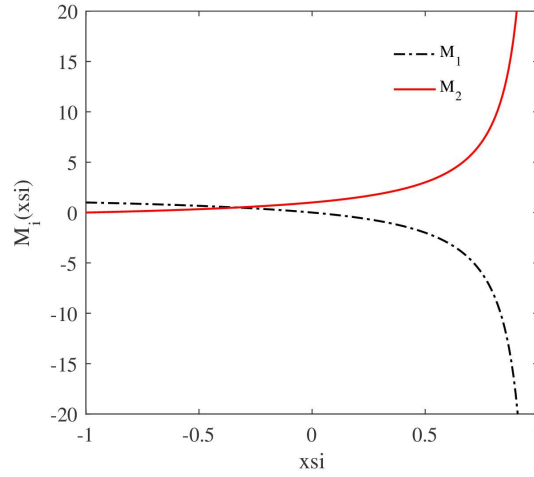


Figura 5.2. Funciones de mapeo para el caso unidimensional.

Lo siguiente es un concepto bastante importante en la técnica que se presenta aquí para la generación de estos elementos. Supóngase un elemento finito lagrangiano unidimensional, cuadrático ($n=2$) de tres nodos, cuyas funciones de forma responden al conocido polinomio de Lagrange dado por:

$$L_j(\xi) = \prod_{i=1; i \neq j}^{n+1} \frac{\xi - \xi_i}{\xi_j - \xi_i} \quad [5.12]$$

estando sus nodos situados en $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ y $\xi_3 = 1$, de modo que se obtienen las funciones de forma que siguen:

$$L_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)} \cdot \frac{(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{(\xi - 0)}{(-1 - 0)} \cdot \frac{(\xi - 1)}{(-1 - 1)} = -\xi \left(\frac{1 - \xi}{2} \right) \quad [5.13]$$

$$L_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)} \cdot \frac{(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{(\xi + 1)}{(0 + 1)} \cdot \frac{(\xi - 1)}{(0 - 1)} = (1 + \xi)(1 - \xi) \quad [5.14]$$

Si observamos, comparando [5.13] y [5.14] con las funciones de mapeo obtenidas, [5.10] y [5.11], correspondientes a los mismos nodos, podemos notar que la única diferencia entre estas es su último término: el término del polinomio correspondiente a ξ_3 , que en [5.10] y [5.11] aparece invertido. Esto es clave porque nos indica que podemos obtener funciones de mapeo para los elementos infinitos a partir de las funciones de forma clásicas (dadas por polinomios de Lagrange en el ejemplo que se sigue) sin más que invertir su último término. Ese último término es el correspondiente a $\xi = 1$ donde se obtiene la singularidad, es decir, en el nodo que se encuentra en el infinito en la coordenada global.

5.3.2 Casos bidimensionales y tridimensionales

Tras haber expuesto la idea básica para el elemento unidimensional, la extensión a dos y tres direcciones no difiere demasiado. Si bien es cierto, se debe destacar la dependencia con la geometría del problema a la hora de formular estos elementos. Diversos autores han tratado problemas con diferentes geometrías: esferas tridimensionales, círculos planos, cubos...etc. En el estudio de la propagación de ondas en medios elásticos se comenzó por la generación de elementos axisimétricos, formulados en las coordenadas esféricas y cilíndricas, debido a la propia naturaleza del problema ondulatorio. También se han desarrollado elementos tridimensionales con geometría de hexaedros o tetraedros, por ejemplo.

En resumen, la naturaleza intrínseca al problema que se pretende resolver afectará a la generación de una u otra geometría más o menos óptima.

Pues bien, normalmente se emplearán elementos los cuales necesitan extenderse al infinito en una o varias direcciones, mientras que en otras permanecer finitos. El proceso para la generación de dichos elementos es el siguiente: se toman funciones de mapeo unidimensionales (como las presentadas anteriormente) asociadas a cada una de las direcciones a extender al infinito, y se multiplican entre sí para acabar ajustándolas a cada elemento. De forma general se formula como sigue [10].

Consideramos el polinomio de Lagrange unidimensional en la coordenada ξ , dado por:

$$L_i^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_{n+1})}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_{n+1})} \quad [5.15]$$

donde el elemento tiene $n+1$ nodos, y el subíndice $i = 1, 2, \dots, n+1$; y la coordenada natural definida en el rango $[-1, +1]$.

Si ahora definimos la función de mapeo unidimensional tal y como hemos presentado en el punto anterior, de forma general:

$$M_i^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_{n+1})}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_{n+1})} \quad [5.16]$$

Como se observa se ha invertido el último término del polinomio de Lagrange para obtener esta.

Ahora bien, de forma general, buscamos la funciones de mapeo de un elemento Lagrangiano q -dimensional, que presenta p direcciones infinitas dentro de las q direcciones totales, y $n+1$ nodos: tomamos los polinomios de Lagrange asociados a las direcciones finitas ($p+1 \dots q$) y los multiplicamos por las funciones de mapeo asociadas a las direcciones infinitas ($1 \dots p$). La función de mapeo MF queda de forma genérica:

$$MF_{nodo(k_1 k_2 \dots k_p \dots k_q)}(dir_1 \dots dir_p \dots dir_q) = M_{k_1}^n(dir_1) \cdots M_{k_p}^n(dir_p) * L_{k_{p+1}}^n(dir_{p+1}) \cdots L_{k_q}^n(dir_q) \quad [5.17]$$

$$MF_{nodo(k_1 k_2 \dots k_p \dots k_q)}(dir_1 \dots dir_p \dots dir_q) = \sum_{i=1}^p M_{ki}^n(dir_i) * \sum_{i=p+1}^q L_{ki}^n(dir_i) \quad [5.18]$$

donde $k_1 k_2 \dots k_p \dots k_q \rightarrow k_i$ define la posición del nodo en el elemento (según una dirección) y $nodo(k_1 k_2 \dots k_p \dots k_q)$ da el número del nodo en esa posición. Los subíndices k_i se relacionan con la dirección dir_i de la siguiente forma:

$$k_i = \frac{n}{2}(dir_i + 2) \quad -1 \leq dir_i \leq 1 \rightarrow 1 \leq k_i \leq n+1$$

Para ilustrar esta idea vamos a obtener las funciones de mapeo de un elemento Lagrangiano bidimensional, cuadrático ($n=2$) que se extiende al infinito en una única dirección ξ .

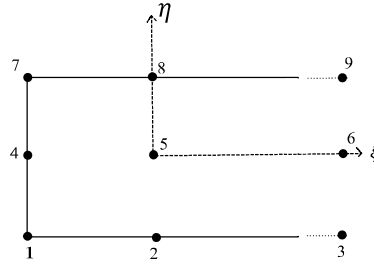


Figura 5.3. Elemento cuadrático de Lagrange de 9 nodos

En este caso tenemos una única dirección infinita $p=1$, que es ξ , y una única dirección finita η , ($q=2$). Tenemos los nodos distribuidos tal como se observa en la figura, localizamos cada uno en el elemento a través de los subíndices k_i ,

$$dir_1 = \xi$$

$$dir_2 = \eta$$

$$n = 2$$

El nodo correspondiente a $k_1 = 1, k_2 = 1$

$$k_1 \equiv k_\xi = 1 \rightarrow 1 = \frac{2}{2}(\xi + 2); \quad \xi = -1$$

$$k_2 \equiv k_\eta = 1 \rightarrow 1 = \frac{2}{2}(\eta + 2); \quad \eta = -1$$

Es decir el nodo 1 estará situado en $(-1, -1)$ según las dos direcciones que definen el elemento, de esta forma $nodo(1,1)$ designa el nodo 1 del elemento. De esta misma forma obtenemos los demás

$$nodo(1,1) = 1$$

$$nodo(2,1) = 2$$

$$nodo(3,1) = 3$$

$$nodo(1,2) = 4$$

$$nodo(2,2) = 5$$

$$nodo(3,2) = 6$$

$$nodo(1,3) = 7$$

$$nodo(2,3) = 8$$

$$nodo(3,3) = 9$$

Comencemos hallando la función de mapeo del elemento, asociada al nodo 1 del mismo y definida en todo el elemento.

$$MF_{nodo(1,1)}(dir_1, dir_2) \equiv MF_1(\xi, \eta) = M_1^n(\xi) \cdot L_1^n(\eta) \quad [5.19]$$

Siendo $M_1^n(\xi)$ la función de mapeo unidimensional en la dirección que tiende al infinito, y asociada al nodo 1 ($\xi = -1$) y $L_1^n(\eta)$ el polinomio de Lagrange en la dirección finita asociado al nodo 1 ($\eta = -1$).

De acuerdo a [5.15] y [5.16]

$$L_1^n(\eta) = \frac{(\eta - \eta_2)(\eta - \eta_3)}{(\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 - \eta_3)} = \frac{-\eta(1 - \eta)}{2} \quad [5.20]$$

$$M_1^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi - \xi_3)} = \frac{-2\xi}{(1 - \xi)} \quad [5.21]$$

De modo que,

$$MF_1(\xi, \eta) = \frac{\xi \eta(1 - \eta)}{(1 - \xi)} \quad [5.22]$$

De esta misma forma obtenemos las funciones de mapeo asociadas a los demás nodos. Observar que las correspondientes a los nodos que se extienden al infinito no se exponen debido a que poseen mayor complejidad y no son empleadas.

$$MF_2(\xi, \eta) = \frac{-\eta(1 - \eta)(1 + \xi)}{2(1 - \xi)} \quad [5.23]$$

$$MF_4(\xi, \eta) = \frac{-2\xi(1 + \eta)(1 - \eta)}{(1 - \xi)} \quad [5.24]$$

$$MF_5(\xi, \eta) = \frac{(1 - \eta^2)(1 + \xi)}{(1 - \xi)} \quad [5.25]$$

$$MF_7(\xi, \eta) = \frac{-\xi\eta(1 + \eta)}{(1 - \xi)} \quad [5.26]$$

$$MF_8(\xi, \eta) = \frac{\eta(1 + \eta)(1 + \xi)}{2(1 - \xi)} \quad [5.27]$$

Si observamos la representación de estas en el espacio es fácil apreciar, como se intuye, que no es mas que una extensión del comportamiento que presentan en el caso unidimensional, ver Figura 5.4.

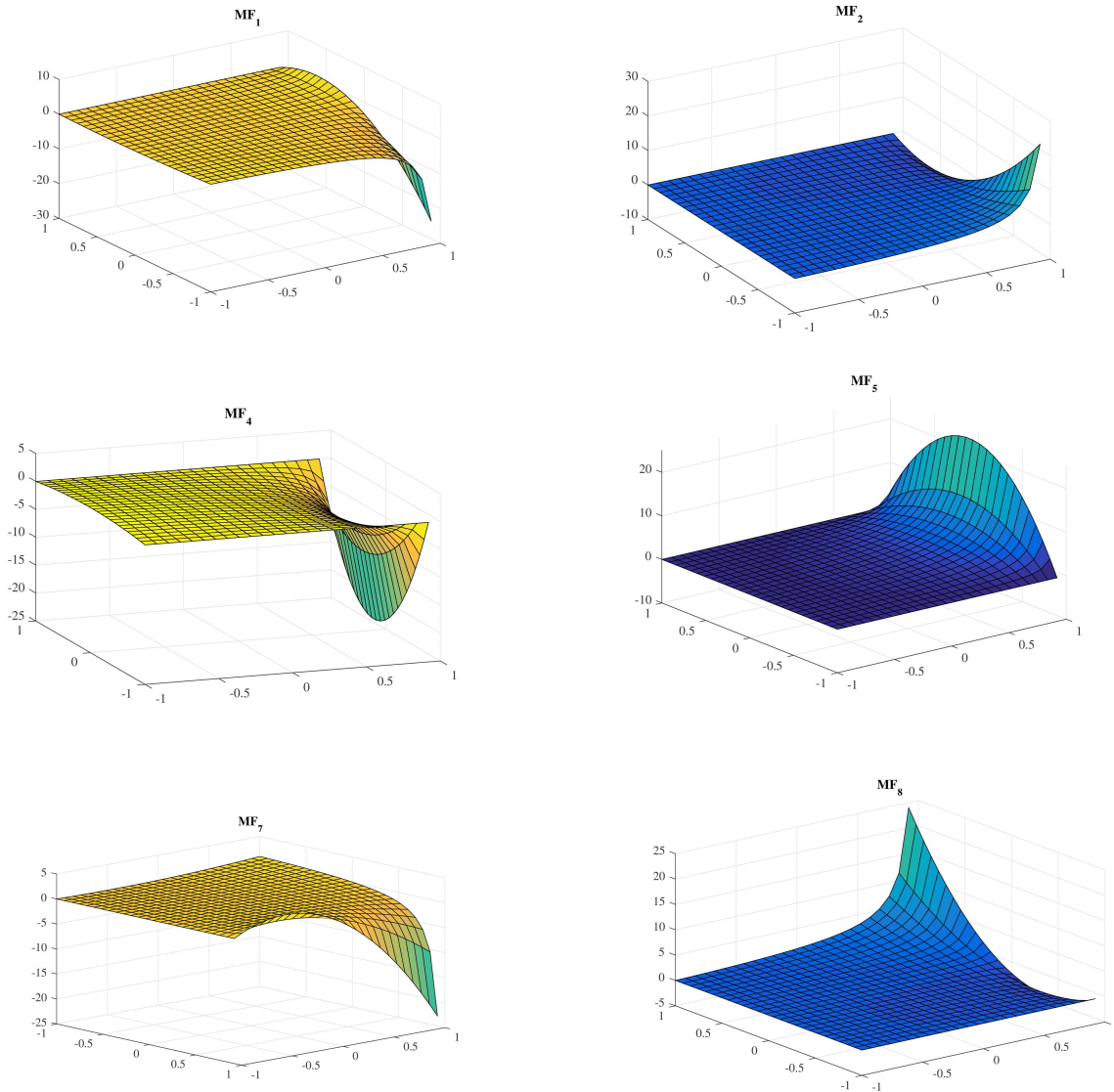


Figura 5.4. Funciones de mapeo para el elemento considerado.

Esta técnica tiene como ventaja principal la similitud conceptual con los elementos finitos habituales, y además su cómoda implementación. Estos admiten igualmente la integración de Gauss-Legendre para el cálculo de las matrices necesarias, con la salvedad del cálculo de un nuevo Jacobiano teniendo en cuenta las funciones de mapeo obtenidas [2]. Considérese de la forma general el cálculo de la matriz de rigidez elemental dado por

$$K_e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega^e \quad [5.28]$$

donde \mathbf{B} es una matriz que contiene las derivadas de las funciones de forma y \mathbf{D} la matriz constitutiva del material, que contiene las propiedades el mismo. La matriz \mathbf{B} estará formada por vectores que contienen las derivadas de las funciones de forma N_i respecto de las coordenadas globales, obtenidas a partir de las derivadas de estas respecto de las coordenadas naturales del elemento y el Jacobiano que relaciona ambas, de la forma general

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad [5.29]$$

efectuándose el cálculo del Jacobiano teniendo en cuenta las funciones de mapeo de la forma

$$J = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial M_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial M_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial M_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad [5.30]$$

y además

$$d\Omega^e = dx dy = |J| d\xi d\eta \quad [5.31]$$

5.4 Decay Type Infinite Elements (DIF)

En este caso la técnica trata de, partiendo de las funciones de forma habituales para los elementos finitos empleados en cuestión, obtener funciones de forma *infinitas* mediante la modificación de las anteriores por medio de una función que normalmente se atenúa en el espacio. Dicha función ha de ser elegida convenientemente de acuerdo a diversos criterios, de los cuales el principal ha de ser la reproducción del comportamiento físico del problema. Esto es, dependerá su elección del problema físico que se trate de reproducir, intentando asimilar esta a la naturaleza del mismo. Por ejemplo, mientras que para problemas estáticos esperaríamos una atenuación monotónica del campo básico, para problemas elastodinámicos es de esperar un comportamiento oscilatorio combinado con una atenuación en el espacio.

Supóngase un determinado elemento finito, con N nodos, cuya función de forma viene dada por $M_i(\xi, \eta)$ con $i = 1, \dots, N$ (supuesto elemento definido por dos coordenadas naturales, el razonamiento para las tres dimensiones es idéntico), se procede a crear un elemento infinito a partir del mismo, para

el cual se definen unas funciones de forma *infinitas* dadas por,

$$N_i(\xi, \eta) = M_i(\xi, \eta) f_i(\xi, \eta) \quad [5.32]$$

donde $f_i(\xi, \eta)$ será la comentada función de atenuación, que tomará un valor unidad para el nodo i , y será elegida de forma que represente un comportamiento adecuado, y $N_i(\xi, \eta)$ tienda al valor deseado en el *infinito* (habitualmente nulo para los problemas que aquí interesan)

Con estas nuevas funciones de forma, N_i , se puede operar de cara a obtener las derivadas que aparezcan en las expresiones pertinentes para la obtención de las matrices necesarias,

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial M_i}{\partial \xi} f_i + M_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \quad [5.33]$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial M_i}{\partial \eta} f_i + M_i \frac{\partial f_i}{\partial \eta} \quad [5.34]$$

Tal como concluye [] en la obtención de las matrices del MEF para elementos infinitos de este modo, se emplean las funciones de forma habituales para establecer la relación geométrica entre variables globales y naturales (Jacobiano) y se emplean las funciones de forma *infinitas* obtenidas de este modo para la aproximación de las variables básicas.

La parte fundamental en esta técnica será, de este modo, una buena elección de la función de atenuación, además de una buena elección del nodo de referencia y la disposición de los elementos. Habitualmente se elige el nodo de referencia de forma centrada en el foco que provoca la perturbación, y la coordenada elemental ξ , o de forma global, r , partirá de dicho nodo alejándose del foco. Las relaciones entre r y ξ dependerá evidentemente de la geometría y disposición de los elementos, pero como se ha dicho, se realizará por medio de las funciones de forma habituales.

En la bibliografía se recomiendan diferentes tipos de funciones de atenuación dependiendo del problema que se resuelve: P. Bettles [14] propone funciones exponenciales del tipo

$$f_i(\xi, \eta) = \exp \left[\frac{\xi_i + \eta_i - \xi - \eta}{L} \right] \quad [5.35]$$

siendo L una longitud característica para la atenuación, y las coordenadas naturales ξ, η en sentido positivo. Estas funciones pueden ser útiles para problemas estáticos en medios elásticos.

Por otro lado, C. B. Yun & J. M. Kim en [10] y [11] proponen funciones de atenuación dadas por ecuaciones de onda, aproximadas en base a soluciones analíticas conocidas. Esto logra reproducir el comportamiento esperado en problemas dinámicos. Estos autores proponen una formulación en el dominio de la frecuencia, donde la función de forma *infinita* viene dada por

$$N_{il}(\xi, \eta, \omega) = M_i(\xi, \eta) f_l(\xi, \eta, \omega) \quad [5.36]$$

donde de la forma general $f(\xi, \eta, \omega)$ responde a una función de onda oportuna, según una dirección

determinada, la cual se obtiene de forma aproximada en base a soluciones analíticas.

Un ejemplo sencillo, tal como se recoge en [10], para un *elemento infinito horizontal de 3 nodos*, que tiende al infinito en la dirección ξ , siendo la dirección ortogonal η . Tomando M_i dado por el polinomio de Lagrange y f_l la función de onda en dirección ξ dados por:

$$M_1(\eta) = L_1(\eta) = \frac{\eta(1 - \eta)}{2} \quad [5.37]$$

$$M_2(\eta) = L_2(\eta) = -\eta(1 + \eta) \quad [5.38]$$

$$f(\xi, \omega) = e^{-(\beta + ik_i x_j)\xi} \quad [5.39]$$

la dependencia de f de la frecuencia se debe al número de onda k_i ; β es un coeficiente de amortiguamiento geométrico, x_j es la coordenada x global del nodo correspondiente. Se toman valores aleatorios de cara a observar de forma cualitativa el aspecto de estas funciones de forma.

$$N_{11}(\xi, \eta) = M_1 \cdot f \quad [5.40]$$

$$N_{21}(\xi, \eta) = M_2 \cdot f \quad [5.41]$$

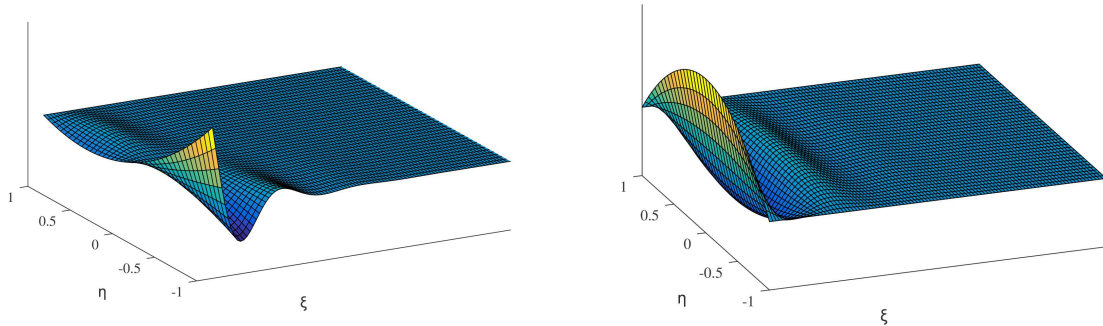


Figura 5.5. Ejemplo de funciones de forma de elementos infinitos.

5.5 Contornos viscosos de J. Lysmer y Roger L. Kuhlemeyer [15].

Se trata de una de las alternativas citadas en el primer capítulo para la generación de bordes que no reflejen las ondas al interior del dominio, mediante la generación de contornos viscosos. En la Referencia [15] puede encontrarse en detalle esta técnica. De forma breve, téngase en cuenta la ecuación de gobierno de la perturbación en el sólido sin fuerzas por unidad de volumen,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i \quad [5.42]$$

la relación constitutiva dada por

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} \quad [5.43]$$

y la compatibilidad,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad [5.44]$$

que dan lugar a la ecuación de gobierno de la forma

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad [5.45]$$

Si bien, se asume que las perturbaciones se propagan a una cierta distancia del foco que las produce en forma de ondas planas (capítulo 2), la ecuación de gobierno puede escribirse para ese caso particular como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad [5.46]$$

con c la velocidad de propagación de las ondas, c tomará el valor de c_p y c_s , para ondas P y ondas S respectivamente.

La solución general a la ecuación [5.46] esta formada por una componente, f , de onda que se propaga en sentido *positivo* y una componente, g , que se propaga en el *negativo*

$$u(x, t) = u = f(x - ct) + g(x + ct) \quad [5.47]$$

Para una onda tipo P propagándose en dirección x , sabemos que las partículas se moverán en dirección de la propagación de modo que el campo de desplazamientos queda

$$\begin{aligned} u_x &= f(x - c_p t) \\ u_y &= u_z = 0 \end{aligned} \quad [5.48]$$

La velocidad y la deformación en dirección x queda

$$\dot{u}_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = -c_p f'(x - c_p t) \quad [5.49]$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = f'(x - c_p t) \quad [5.50]$$

Las componentes de tensión a partir de la relación de comportamiento

$$\sigma_x = (\lambda + 2G)\varepsilon_x \quad \sigma_y = \sigma_z = \lambda\varepsilon_x \quad [5.51]$$

Ahora podemos expresar la tensión en función de la velocidad de la partícula, de la forma

$$\sigma_x = -\rho c_p \dot{u}_x \quad [5.52]$$

Si razonamos igualmente para una onda S que se propaga en dirección x, las componentes de desplazamiento de las partículas estarán contenidas en el plano

$$u_x = 0 \quad u_y = f(x - c_s t) \quad u_z = f(x - c_s t) \quad [5.53]$$

Expresando las tensiones en función de las velocidades de las partículas,

$$\sigma_y = -\rho c_s \dot{u}_y \quad \sigma_z = -\rho c_s \dot{u}_z \quad [5.54]$$

Si asumimos en algún punto de la dirección x un medio de diferentes propiedades, o un contorno rígido, la onda incidente producirá en el primer caso una componente refractada y otra reflejada, siendo en el segundo caso toda reflejada. Aparecerá así una perturbación en dirección opuesta, transformándose las compresiones en tracciones y viceversa (cambio en el signo de las ecuaciones 5.52 y 5.54). El objetivo será por lo tanto evitar la componente reflejada al interior del dominio. En [15] se encuentra el razonamiento en detalle, en resumen, de forma general en el contorno se tendrán perturbaciones incidiendo con un determinado ángulo, pudiendo ser descompuestas en componente normal y tangencial al contorno de la forma:

$$\sigma_n = a\rho c_p \dot{u}_n$$

$$\sigma_t = b\rho c_s \dot{u}_t \quad [5.55]$$

siendo a y b constantes adimensionales, cuyo valor se recomienda unidad o próximo a ella según [15]. Se trata de generar matrices de amortiguamiento para los contornos, a partir de [5.55]

5.6 PML vs E. Infinitos

Nótese que existen claras diferencias conceptuales entre el método del PML y los Elementos Infinitos. Con el mismo objetivo, en el primer método se trata de discretizar una porción del medio externa al dominio de interés, habitualmente en forma de capa. La discretización de dicha capa es influyente en los resultados obtenidos como se ha observado en el capítulo anterior, y debe asegurar la compatibilidad entre los nodos en la interfase con el dominio de interés. Sin embargo, el segundo de los métodos no se enfoca así: es un solo elemento el que se dispone en el contorno del medio de interés, extendiendo el mismo hacia el infinito. Este elemento parte de los nodos que se encuentran en el contorno de dicho medio a partir de las técnicas anteriormente expuestas.

Siendo el primero de los métodos, a priori, independiente de la geometría, el segundo dependerá fuertemente de ella, y en concreto de la generación de los elementos a partir de la posición del nodo o nodos de referencia (x_0 en la notación anterior).

Por otro lado, la función de atenuación del PML, responsable principal del efecto que este tiene en los resultados, queda definida como ya se apuntó de forma global. Mientras que, para los Elementos Infinitos, puesto que no son más que elementos finitos conceptualment, las funciones de forma y mapeo quedarán definidas de forma elemental.

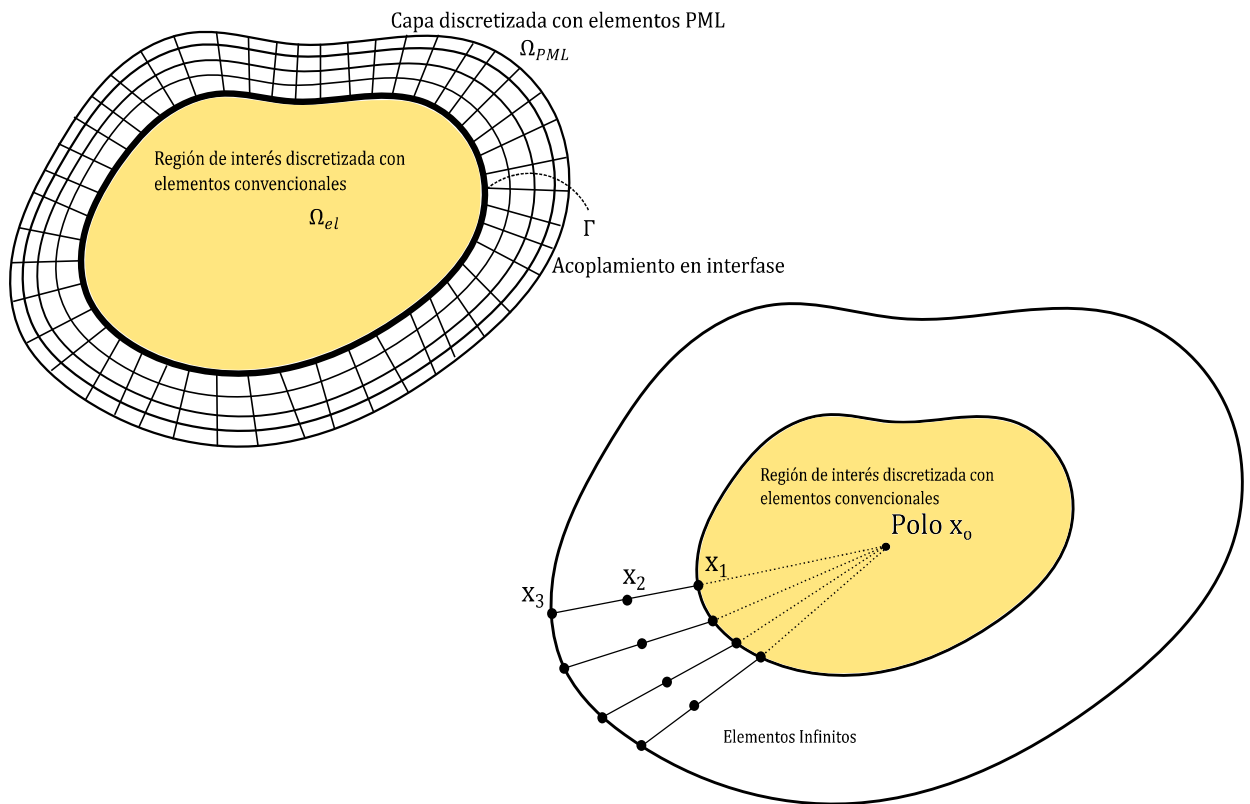


Figura 5.6. Esquema de los modelos con PML y elementos infinitos.

5.7 Verificación: semiespacio sometido a carga escalón

Como ejemplo de cara a la verificación del método, se considera la modelización de un semiespacio infinito sometido a una carga puntual con una distribución temporal de tipo escalón. Se realizan dos modelos en ANSYS: un primer modelo en cuyos contornos se impide el desplazamiento en todos los grados de libertad de los nodos contenidos en los mismos; y un segundo modelo donde se generan elementos infinitos en los contornos. La geometría, materiales, y carga es idéntica en ambos modelos, la única diferencia existente son las condiciones de contorno establecidas en ambos.

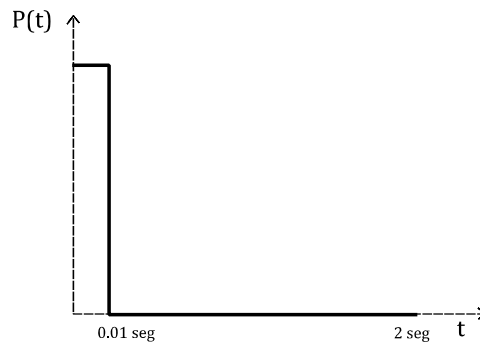


Figura 5.7. Carga escalón.

Se trata de un semiespacio elástico con una velocidad de propagación de ondas S de 50m/s, una densidad de 1000 kg/m³ y un coeficiente de Poisson de 0.3, sometido a un impulso de valor máximo 10 kN y una duración de 0.01 segundos en el centro del modelo. Se genera un volumen mallado regular con elementos tridimensionales SOLID185 de 0.1 m de lado, y una capa de elementos infinitos INF157. El elemento INF157 se genera a partir de un nodo de referencia o polo (x_o en la teoría anterior) y los nodos contenidos en el contorno del volumen generado con SOLID185, adquiriendo las propiedades mecánicas del material de dicho volumen. Este elemento implementa la teoría anteriormente expuesta.

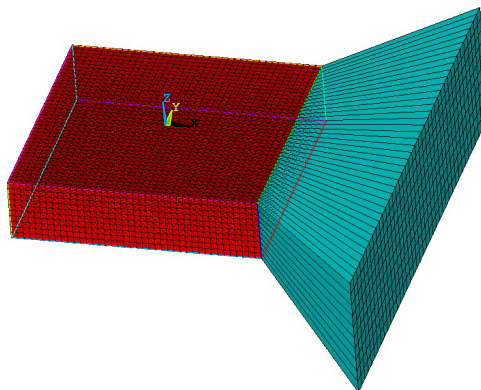


Figura 5.8 Generación de los elementos infinitos en el contorno.

Se realiza un análisis transitorio con un paso de integración de 0.1 segundos. Los resultados revelan lo esperado: las respuestas obtenidas en ambos modelos son similares mientras que la perturbación no llega a los contornos del mismo. Cuando esto ocurre las respuestas adquieren un comportamiento totalmente diferente: el modelo que no incluye elementos infinitos provoca reflexiones hacia el interior del modelo, afectando al campo de desplazamientos obtenido en él. Sin embargo, se manifiesta un correcto comportamiento en el modelo con elementos infinitos, donde no existen dichas reflexiones espurias. Se presenta el campo de desplazamientos vertical para diferentes instantes de tiempo.

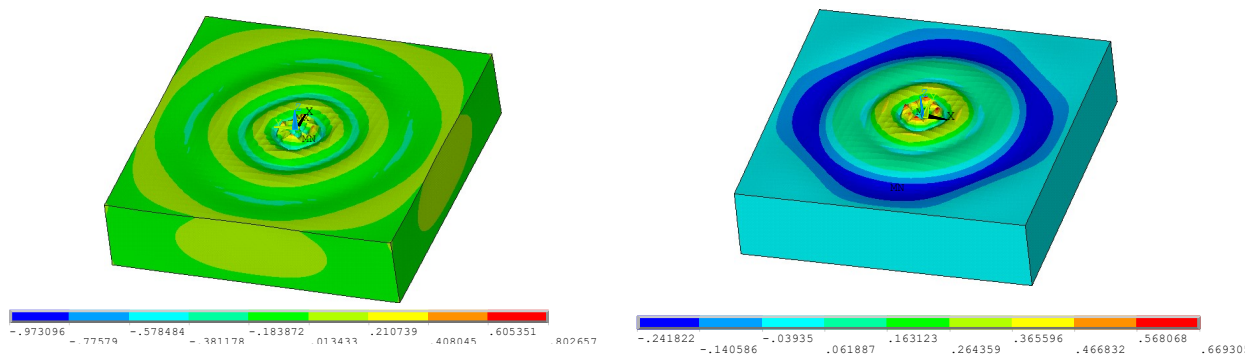


Figura 5.8. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.11 segundos: a la izquierda el modelo con elementos infinitos, a la derecha el modelo sin ellos.

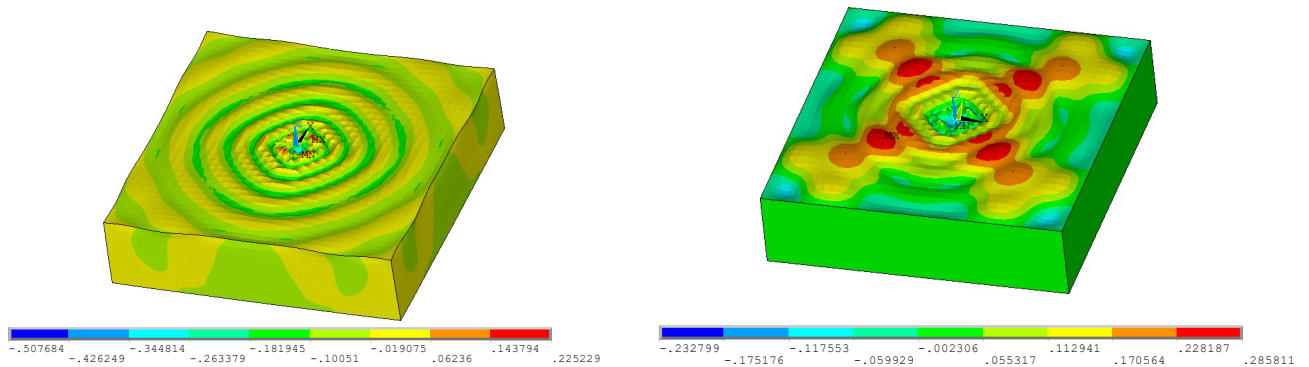


Figura 5.9. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.25 segundos: a la izquierda el modelo con elementos infinitos, a la derecha el modelo sin ellos.

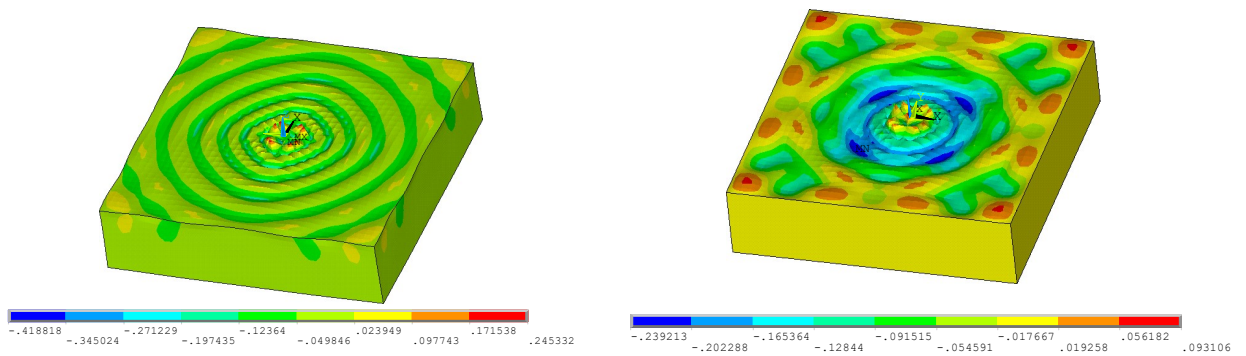


Figura 5.10. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.27 segundos: a la izquierda el modelo con elementos infinitos, a la derecha el modelo sin ellos.

6 CASO DE APLICACIÓN: COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE PUENTES DE FERROCARRIL

6.1 Introducción

Se presenta aquí un caso de estudio de cara a la aplicación práctica de la teoría presentada con anterioridad. Se trata de estudiar la influencia que presenta, en general la consideración del suelo, y en particular los elementos infinitos en modelos numéricos para el análisis de la interacción suelo-estructura. El caso elegido es el de puentes de ferrocarril para alta velocidad de luces en el rango de medias-cortas, para los que se generarán modelos de elementos finitos con el software ANSYS.

La elección de este tipo estructural se motiva a raíz de la gran interacción con el suelo que presenta este tipo de estructuras. En general las estructuras ferroviarias presentan un comportamiento dinámico fuertemente influenciado por su interacción con el suelo, y particularmente dentro de estas, los viaductos de alta velocidad de luces medias-cortas (12.5 a 25 metros).

Este tipo de estructuras se ha estudiado exhaustivamente en su comportamiento dinámico, encontrándose comportamientos característicos en las mismas, los cuales deben ser tenidos en cuenta a la hora de su diseño y explotación, como son los conocidos fenómenos de resonancia y cancelación para dichos puentes. Estos dependen de diversos factores como las frecuencias naturales de la estructura, las frecuencias de las solicitaciones, la velocidad de paso de la carga (tren de cargas) en la estructura, las propiedades del terreno en que se cimenta, etc.

Se ha de aclarar que en lo que sigue el objetivo no es estudiar el comportamiento de una gran diversidad de viaductos de forma paramétrica, obteniendo respuestas en función de diferentes factores como las luces, las secciones y materiales del tablero, etc; sino obtener una perspectiva sobre la influencia de la implantación de elementos infinitos en los modelos de cálculo. Para ello se generarán, por un lado, modelos con elementos finitos que modelen el campo cercano a la estructura, y elementos infinitos para la modelización del campo lejano a la misma; y por otro lado, modelos con únicamente elementos finitos. La idea es comparar los resultados extraídos de estos y obtener conclusiones.

Se estudia un determinado modelo de puente viga de 25 metros de luz, cimentado sobre diferentes tipos de suelos y sometido a una carga móvil aislada. Se recoge el comportamiento (desplazamientos y aceleraciones) en el mismo. Se estudian modelos con elementos infinitos y sin ellos, de cara a observar la influencia de estos.

6.2 Análisis frente a carga móvil aislada

Este tipo de estructuras presenta, como ocurre generalmente, una mayor interacción con el suelo en el régimen dinámico. Para todos los casos a estudiar y que se han comentado de forma breve, se realizará un análisis dinámico de la estructura sometida a una carga móvil que la recorre a una determinada velocidad. Este tipo de estructuras generalmente se analizan bajo la acción de un tren de cargas que las recorre, siendo suficiente para el objetivo que aquí se persigue obtener la respuesta ante una sola carga aislada.

De este modo, se analizarán todos los modelos ante la sollicitación de una carga puntual, de valor igual a 210 kN que simula la carga por eje del tren dinámico universal A10 de la IAPF. Evidentemente, dado el paso de la carga centrada en el tablero se estudiará únicamente el comportamiento a flexión del mismo, no apareciendo modos de torsión en este.

Se realizará de este modo un análisis transitorio en ANSYS, donde la carga puntual recorrerá la viga (tablero del puente) a la velocidad de 300 km/h. De este modo la discretización del tablero en elementos tipo viga dependerá de la velocidad de paso de la carga sobre el mismo.

Este análisis nos proporcionará la respuesta de la estructura en dos regímenes dinámicos diferentes: en vibración forzada cuando la carga se encuentra sobre la viga ($tV \leq L$) y en vibración libre cuando a carga deja la estructura ($tV > L$), siendo este último de mayor interés.

Como conocemos, la resolución del problema dinámico puede afrontarse de diferentes formas, como son: la superposición modal, extrayendo los modos de vibración y frecuencias naturales de la estructura y proyectando la solución en la base ortonormal que forman dichos modos, lo que permite desacoplar el sistema de ecuaciones; o bien, mediante métodos de integración directa en el tiempo de la ecuación que gobierna el problema. En este caso se realizará un análisis transitorio por integración directa en ANSYS. El software resolverá la ecuación de la dinámica empleando el método de Newmark [19], [20] realizando la integración directa en el tiempo. La ecuación a resolver:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad [6.1]$$

En este caso el vector F contendrá la carga puntual que se irá desplazando a una velocidad V a lo largo del tablero, pasando del nodo n al nodo $n+2$. La discretización del tablero dependerá de ello, relacionándose el tamaño del elemento, dx , con la velocidad de circulación y el paso de tiempo en la integración de la forma $dx = \Delta t \frac{V}{2}$

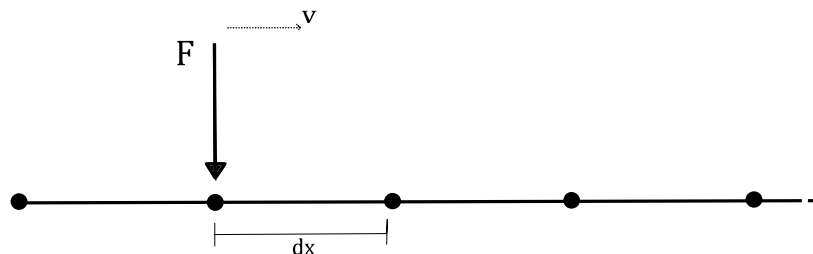


Figura 6.1. Esquema de la carga aplicada.

La ecuación [6.1] se resolverá paso a paso en el tiempo, con un paso de integración Δt . El análisis transitorio de esta forma no es más que una sucesión de análisis estáticos donde participan los efectos inerciales y viscosos en el comportamiento de la estructura y el estado de las variables en el paso inmediatamente anterior. El método de Newmark resuelve la ecuación en el paso de tiempo $n+1$

$$\mathbf{M}u_{n+1}'' + \mathbf{C}u_{n+1}' + \mathbf{K}u_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad [6.2]$$

asumiendo para las velocidades y aceleraciones en el paso $n+1$ en función de sus valores en el paso anterior y un promedio de las aceleraciones entre ambos pasos,

$$u_{n+1}' = \dot{u}_n + [(1 - \delta)\ddot{u}_n + \delta u_{n+1}'']\Delta t \quad [6.3]$$

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{u}_n + \alpha u_{n+1}''\right]\Delta t^2 \quad [6.4]$$

siendo δ y α los parámetros de integración de Newmark. Deberán calcularse en cada paso las variables $u_{n+1}, u_{n+1}', u_{n+1}''$ a partir de sus valores conocidos en el paso anterior, $u_n, \dot{u}_n, \ddot{u}_n$. El procedimiento es: tomando 6.2, 6.3 y 6.4 se obtiene una expresión donde la única variable incógnita es u_{n+1} ,

$$(\mathbf{a}_0\mathbf{M} + \mathbf{a}_1\mathbf{C} + \mathbf{K}) u_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{M}(\mathbf{a}_0 u_n + \mathbf{a}_2 \dot{u}_n + \mathbf{a}_3 \ddot{u}_n) + \mathbf{C}(\mathbf{a}_1 u_n + \mathbf{a}_4 \dot{u}_n + \mathbf{a}_5 \ddot{u}_n) \quad [6.5]$$

donde a_i son coeficientes que dependen del paso de tiempo y de los parámetros de integración δ y α . Una vez obtenido u_{n+1} se calculan las velocidades y aceleraciones de acuerdo a

$$u_{n+1}' = a_1(u_{n+1} - u_n) - a_4(\dot{u}_n) - a_5(\ddot{u}_n) \quad [6.6]$$

$$\ddot{u}_{n+1} = a_0(u_{n+1} - u_n) - a_2(\dot{u}_n) - a_3(\ddot{u}_n) \quad [6.7]$$

El problema queda determinado estableciendo las condiciones iniciales en las variables u_o, \dot{u}_o y \ddot{u}_o .

A considerar la importancia de la elección de los parámetros de integración. El método de Newmark se presenta incondicionalmente estable siempre que se cumpla [19]

$$\delta \geq \frac{1}{2}$$

$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \delta \right)^2$$

es usual introducir el factor γ de decaimiento de la amplitud, quedando las condiciones para los parámetros

$$\delta = \frac{1}{2} + \gamma$$

$$\alpha = \frac{1}{4}(1 + \gamma)^2$$

con $\gamma \geq 0$.

Los valores empleados en los análisis transitorios realizados son:

$$\gamma = 0.005$$

$$\alpha = 0.2525$$

$$\delta = 0.5050$$

6.3 Estudio del comportamiento dinámico a flexión de puentes de ferrocarril de 25 metros de luz.

6.3.1 Descripción geométrica del modelo

En este primer caso de estudio se analiza un viaducto de 25 metros de luz, simplemente apoyado en estribos en forma de L. Se trata de una sección mixta cerrada compuesta por una losa de hormigón de 0.25 m de espesor y dos perfiles metálicos de 1.5 m de canto y 20 mm de espesor, cerrándose la sección por medio de una chapa de 30 mm de espesor.

Los materiales empleados para la estructura son el hormigón para la losa y los estribos, y el acero para el perfil metálico, con un módulo de deformación longitudinal de 20 GPa para el primero y 210 GPa para el segundo.

Se considera el amortiguamiento proporcional de Rayleigh para la estructura, de acuerdo a:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad [6.7]$$

donde \mathbf{C} es la matriz de amortiguamiento, y \mathbf{M} y \mathbf{K} las de masa y rigidez respectivamente. Los coeficientes de Rayleigh vendrán dados por

$$\alpha = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad [6.8]$$

$$\beta = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad [6.9]$$

con el rango de frecuencia acotado por el la primera frecuencia natural para ω_i y una frecuencia de 30 Hz para ω_j .

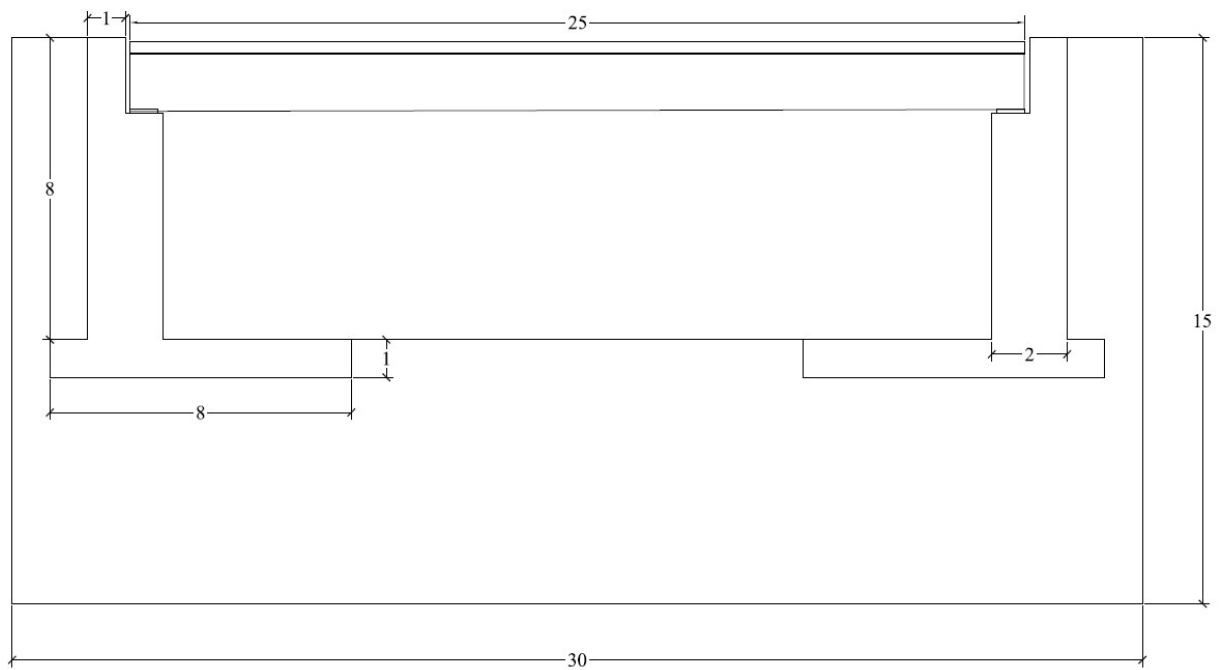


Figura 6.2. Croquis en alzado del modelo generado.

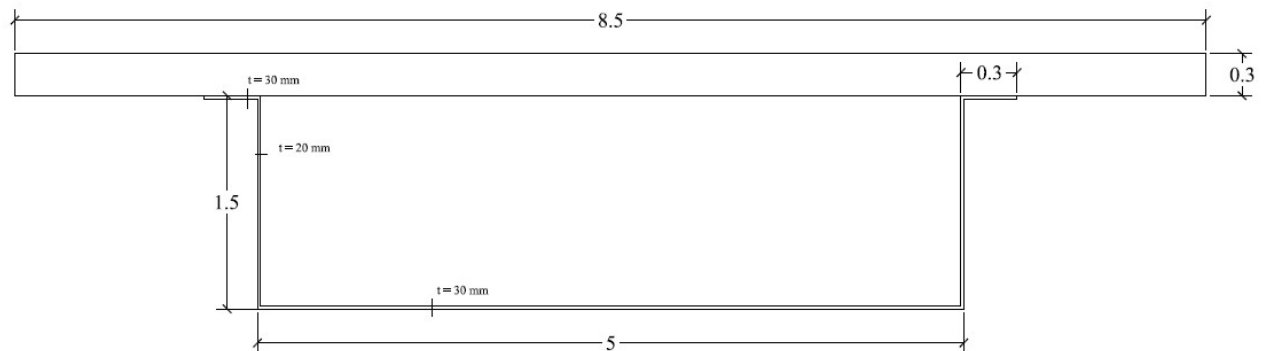


Figura 6.3. Sección del puente viga. Formada por la losa de hormigón y el perfil metálico.

6.3.2 Tipos de suelos a considerar

Se consideran en el análisis tres tipos de suelos. Se pretende con ellos representar el comportamiento de suelos blandos a muy rígidos, pasando por suelos de características medias.

Estos suelos se eligen con una misma densidad y módulo de Poisson, pero con diferentes velocidades de propagación de ondas de corte, y así mismo diferentes módulos de deformación transversal. En la Tabla 6.1 se recogen estos. Para todos ellos se considera un amortiguamiento del 5%, un coeficiente de Poisson de 0.3 y una densidad de $1750 \frac{kg}{m^3}$

	Suelo I	Suelo II	Suelo III
Cs [m/s]	100	160	220
G [MPa]	17.5	44,8	84.7

Tabla 6.1. Propiedades de los suelos a considerar en el análisis.

teniendo que

$$C_s = \sqrt{G/\rho}$$

$$E = \frac{G}{2(1 + \nu)}$$

6.3.3 Descripción del modelo de elementos finitos

Se pretende establecer las diferencias en el comportamiento del tablero para los suelos que se exponen, y además, las diferencias que existen entre considerar elementos infinitos o no en los modelos. Se generan por lo tanto los siguientes:

Ia. Modelo combinando EF-EI, considerando el suelo tipo I.

Ib. Modelo con únicamente elementos finitos, considerando el suelo tipo I.

IIa. Modelo combinando EF-EI, considerando el suelo tipo II.

IIb. Modelo con únicamente elementos finitos, considerando el suelo tipo II.

IIIa. Modelo combinando EF-EI, considerando el suelo tipo III.

IIIb. Modelo con únicamente elementos finitos, considerando el suelo tipo III.

IVa. Modelo combinando EF-EI, considerando el suelo tipo IV.

IVb. Modelo con únicamente elementos finitos, considerando el suelo tipo IV.

Todos los anteriores con la geometría descrita en secciones anteriores. Evidentemente la generación de los modelos será diferente en cuanto a la incorporación de los elementos infinitos. La idea es, modelizar la estructura, y una fracción del suelo más próxima a la estructura y que interacciona directamente con ella (esto es, el campo cercano o *near field*). En los modelos que sólo emplean elementos finitos, en los bordes o contornos de este suelo próximo a la estructura se han de aplicar condiciones de contorno, generalmente en desplazamientos, para poder obtener la solución. Se impondrán nulos los desplazamientos en estos contornos. Mientras que en los modelos que incluyen elementos infinitos serán estos los que modelen el campo lejano o *far field* sin necesidad de imponer condiciones de contorno: como se ha expuesto en la teoría de los elementos infinitos, el desplazamiento se atenuará desde los bordes del modelo.

El modelo será implementado en el software de elementos finitos ANSYS, y los elementos a emplear serán los siguientes:

El Elemento *Beam188* para el modelo del tablero tipo viga, tanto de la losa de hormigón como del perfil metálico. Elemento tipo viga 3D de 2 nodos, con 6 grados de libertad por nodo, que implementa la teoría de vigas de Timoshenko con deformación por cortante.

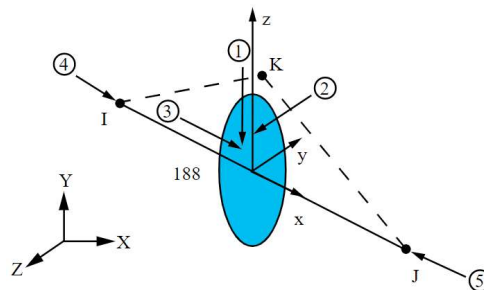


Figura 6.4. Esquema del elemento BEAM188 de Ansys. Ansys MAPDL Element Library.

El Elemento *Solid185* para el modelo de los estribos y el suelo. Este elemento se mencionó en secciones anteriores. El suelo de este modo será modelizado como un medio elástico lineal e isótropo, cuyas características son las definidas anteriormente.

Elemento *Infin257*. Es un elemento 2D o 3D que, a partir del elemento base (elemento en el borde del modelo) extiende este generando un medio semi-infinito. Esto es, como se presentó en la teoría, a partir del elemento finito que se encuentra en el borde, y a partir de un nodo de referencia o *pole*, una sola capa de elementos infinitos es capaz de modelar el campo lejano o *far field* extendiendo dicho elemento en la dirección considerada a partir del nodo de referencia y los nodos de los elementos base

contenidos en el borde. Este elemento implementa la teoría del *mapping infinite element* (MIF) para el caso estático y la teoría de *borde absorbente o decay type infinite element* (DIF) para el caso dinámico.

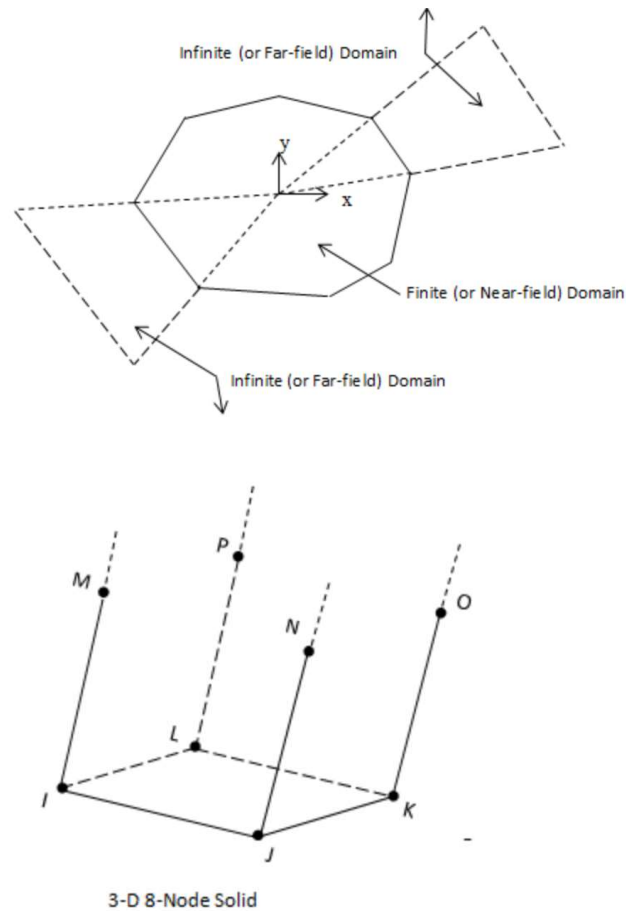


Figura 6.5. Esquema del elemento INFIN257 de Ansys. Ansys MAPDL Element Library

Una vez conocidos los elementos a emplear, se describe el modelo de elementos finitos generado. Estará formado por los estribos embebidos en la masa de suelo tal y como se observa en la Figura 6.6. Este suelo es el modelizado con Solid185. Nótese la geometría regular, de cara a un mallado regular en forma de cubos: esto facilita, o posibilita la generación de elementos infinitos. Recordar que estos son fuertemente dependientes de la geometría y principalmente de la posición del nodo de referencia y de los nodos de borde del modelo.

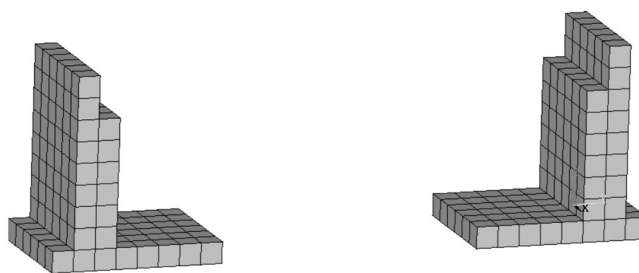


Figura 6.6. Modelo de estribos en ANSYS:

Para la generación de los elementos infinitos se seleccionan dos nodos de referencia, ambos en el centro del modelo: uno a la altura de la superficie libre de suelo entre ambos estribos ($z=0$) y otro a la altura de los estribos ($z=\text{altura del estribo}$). Seleccionando los nodos de los contornos del modelo, los elementos infinitos se generarán a partir de las rectas que pasan por dichos nodos y el de referencia. Se pueden usar hasta 3 nodos de referencia en la generación. En el modelo se han generado estos a partir de uno y dos nodos de referencia.

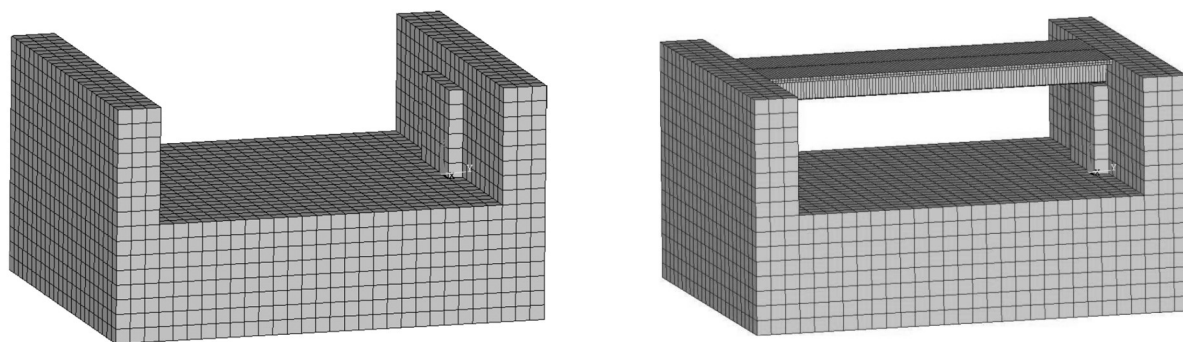


Figura 6.7. Modelo de suelo, estribos y tablero.

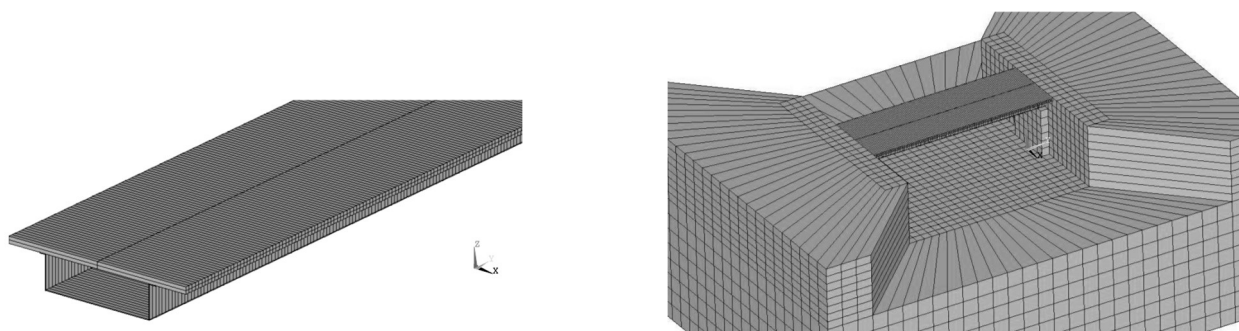


Figura 6.8. Modelo de tablero (izquierda), y suelo con elementos infinitos (derecha)

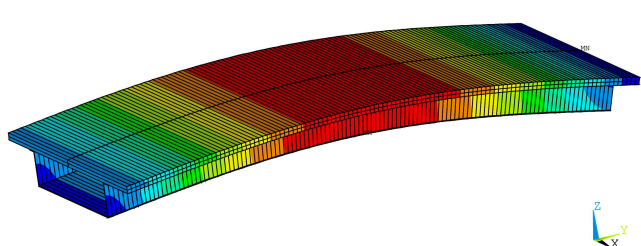
6.3.4 Viga simple: frecuencias y modos naturales de vibración

Antes de nada se considera interesante analizar el comportamiento del modelo más simple posible: el tablero del puente viga sin estribos ni suelo adyacente. Esto es un problema de una viga simplemente apoyada. Un análisis modal en ANSYS nos revelará sus frecuencias naturales y modos de vibración, cuando esta no se encuentra solicitada por ninguna acción, es decir, en vibración libre.

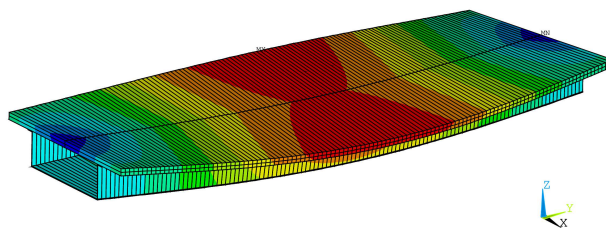
El estudio en vibración libre de las estructuras se muestra fundamental de cara a una comprensión acertada de su comportamiento, dado que, cuando estas se vean solicitadas por diferentes acciones responderán de la forma que fuera, pero siempre tras dicha respuesta se esconderán los

modos naturales de vibrar de esta estructura.

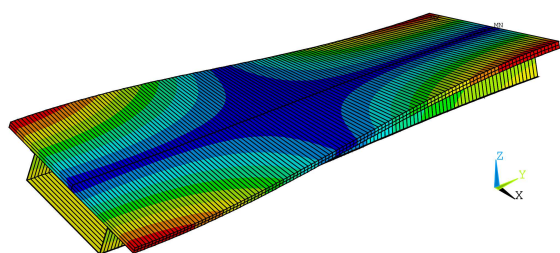
Además, aunque no empleándose aquí, la extracción de los modos de vibración proporciona una herramienta matemática de gran utilidad a la hora de obtener la respuesta de la estructura ante alguna sollicitación, pues estos forman una base ortonormal que sirve para proyectar la respuesta temporal, y además, gracias a sus propiedades de ortogonalidad permiten afrontar el problema dinámico descomponiéndolo en subproblemas más simple. Esto es conocido como solución mediante superposición modal.



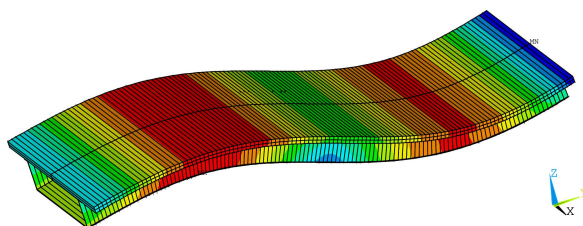
Modo 1. 7 Hz.



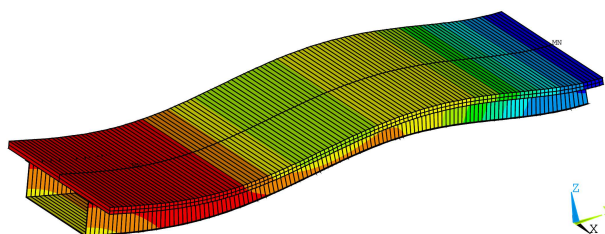
Modo 2. 16.73 Hz.



Modo 3. 16.93 Hz.



Modo 4. 24.5 Hz.



Modo 5. 34.47 Hz

Figura 6.9. Primeros cinco modos naturales de vibración del tablero.

6.3.5 Análisis y resultados

Se realiza por tanto el análisis descrito en el apartado 6.2.: una carga móvil de 210 kN que recorre el tablero a la velocidad de 300 km/h.

Se presentan los resultados obtenidos para los diferentes modelos con elementos infinitos y sin ellos, y teniendo en cuenta la presencia de los distintos tipos de suelo propuestos. En la Tabla 6.2 se recogen los valores máximos para el desplazamiento y la aceleración vertical en el centro de vano. Se observa una clara tendencia en los desplazamientos de disminución de la amplitud máxima de estos conforme el suelo presenta una mayor rigidez. Con la aceleración ocurre a la inversa.

		Desplaz. Máx. [mm]	Acel. Máx. [m/s ²]
Suelo I	Modelo Sin Einf.	1,49	0,67
	Modelo Con Einf.	1,6	0,64
Suelo II	Modelo Sin Einf.	1,39	0,76
	Modelo Con Einf.	1,48	0,66
Suelo III	Modelo Sin Einf.	1,39	0,86
	Modelo Con Einf.	1,43	0,7
Viga Simple		1,36	0,9

Tabla 6.2. Desplazamientos y aceleraciones máximas en centro de vano.

Si bien, dicha tendencia se pone de manifiesto en ambos modelos los que no incluyen elementos infinitos se presentan más rígidos, dando lugar a desplazamientos menores y aceleraciones mayores. En la Figura 6.10 se plasma gráficamente lo comentado. Se puede intuir como las aceleraciones se presentan notablemente superiores en los modelos que no los incluyen, presentando además variaciones más bruscas.

A la vista de los resultados obtenidos, y en cuanto a las aceleraciones verticales en el tablero, cabe destacar que presentan un valor aceptable. Considérense los límites establecidos en la *Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de ferrocarril (IAPF)* [49] en su apartado 4.2.1.1.1., donde se establece un valor máximo para vía en balasto de 0.35g y de 0.5g en vía sin balasto, para esta aceleración. Evidentemente estas aceleraciones se habrán de obtener mediante modelos de trenes de carga, y no cargas aisladas.

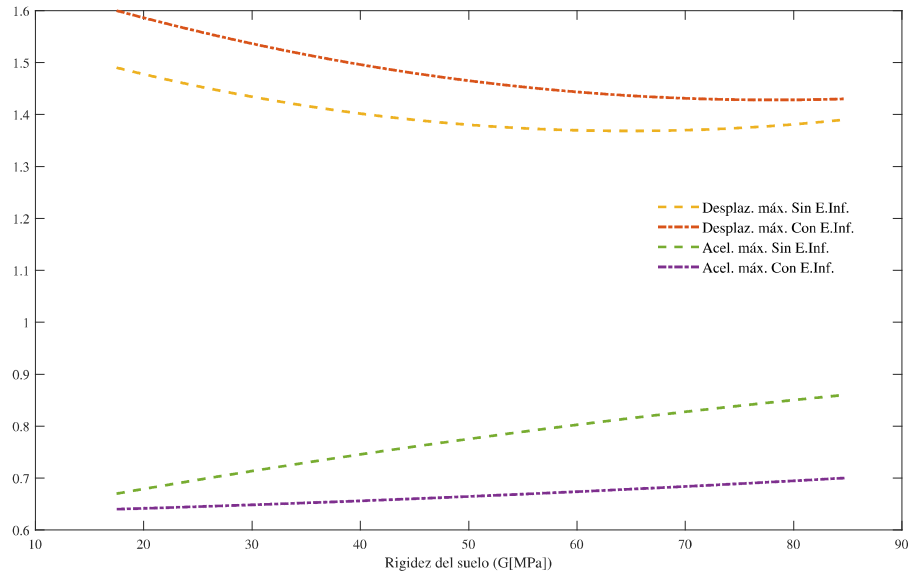


Figura 6.10. Tendencia de la respuesta en función de la rigidez del suelo, para modelos con elementos infinitos (C/EInf.) y sin ellos (S/EInf.).

En primer lugar, para cada tipo de suelo, conviene observar las respuestas obtenidas empleando elementos infinitos frente a las obtenidas prescindiendo de ellos. Para el suelo menos rígido, Suelo I, el comportamiento obtenido mediante ambos modelos presenta notables diferencias. A la vista de las Figuras 6.11 y 6.12 se puede observar como el modelo que no incorpora este tipo de elementos exhibe un comportamiento muy diferente: este se presenta más rígido, a igualdad de material. En la vibración forzada ($t < \frac{L}{v} = 0.3 \text{ seg}$) el desplazamiento mayor se produce para el modelo con elementos infinitos, mientras que en la vibración libre ($t < 0.3 \text{ seg}$) las oscilaciones mayores se dan en el modelo sin elementos infinitos. Además, se observa que la vibración libre se amortigua mucho antes en el modelo que incluye estos elementos.

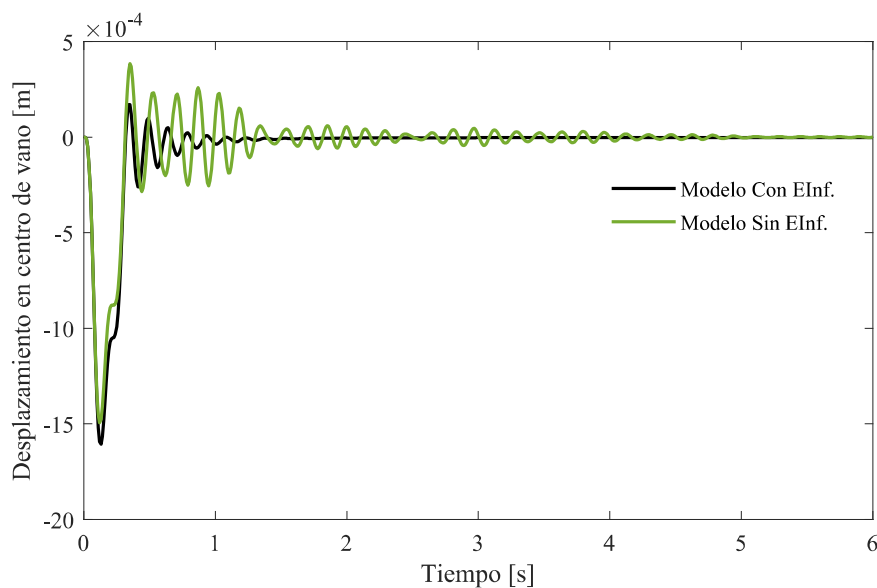


Figura 6.11. Desplazamiento en el centro del vano para el modelo con suelo tipo I.

Recordar que tanto el amortiguamiento estructural como el correspondiente al suelo se mantienen con el mismo valor en ambos modelos, de modo que la diferencia reside únicamente en la consideración de estos elementos que proporcionan un amortiguamiento adicional de radiación.

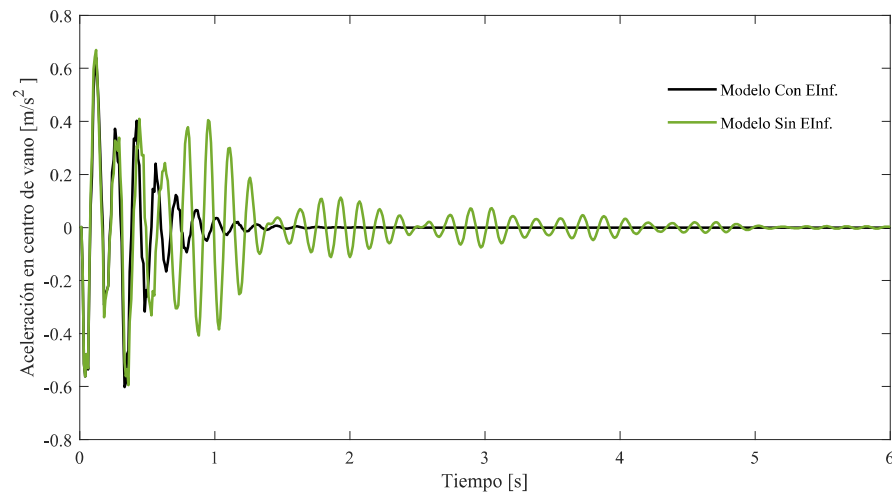


Figura 6.12. Aceleración en el centro del vano para un suelo tipo I.

Cuando se consideran suelos con rigideces no tan bajas como el tipo I (Suelos tipo II y III) se observa un cambio notable en la respuesta del modelo sin elementos infinitos, algo más natural y próxima a la del modelo que si los integra (Figuras 6.13 a 6.15) Aun así, se pone de manifiesto de nuevo el amortiguamiento superior que experimenta la respuesta en el segundo de estos.

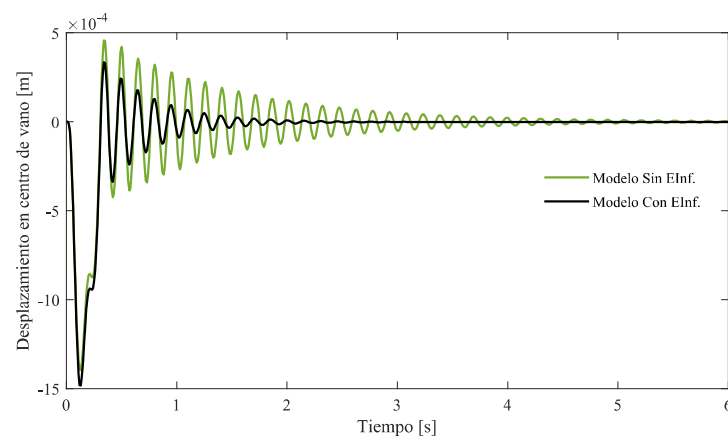


Figura 6.13. Desplazamiento en el centro del vano para un suelo tipo II.

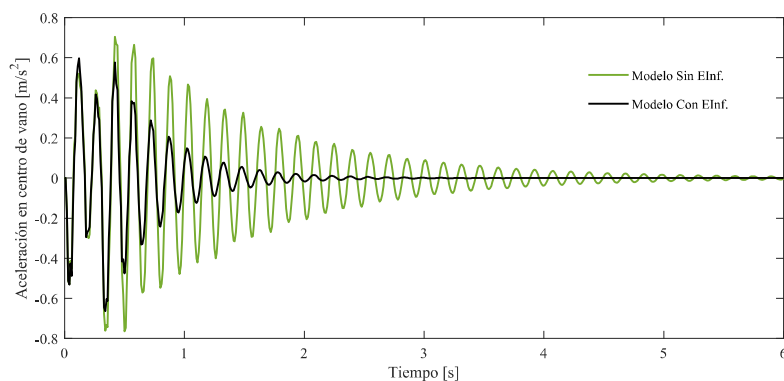


Figura 6.14. Aceleración en el centro del vano para un suelo tipo II.

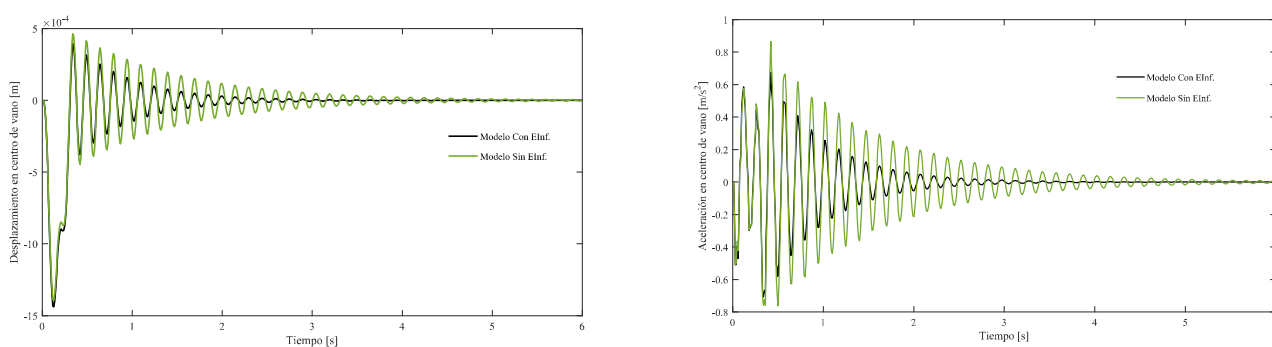


Figura 6.15. Respuesta en centro de vano para un suelo tipo III.

Por otro lado, de cara a obtener una mejor idea de las diferentes respuestas observadas en los diferentes suelos, y además, en el modelo de viga simple sin consideración de suelo alguno, se muestran estas de forma conjunta, para los modelos que incorporan elementos infinitos, en la Figura 6.16 y para los que no, en la Figura 6.17

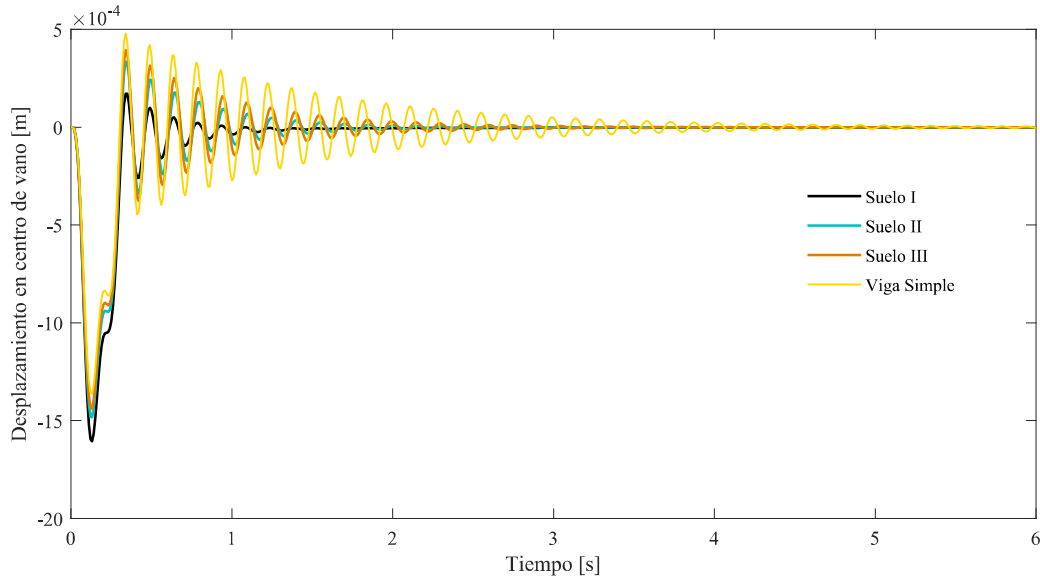


Figura 6.16. Desplazamiento en el centro de vano para los diferentes suelos considerados en los modelos con elementos infinitos.

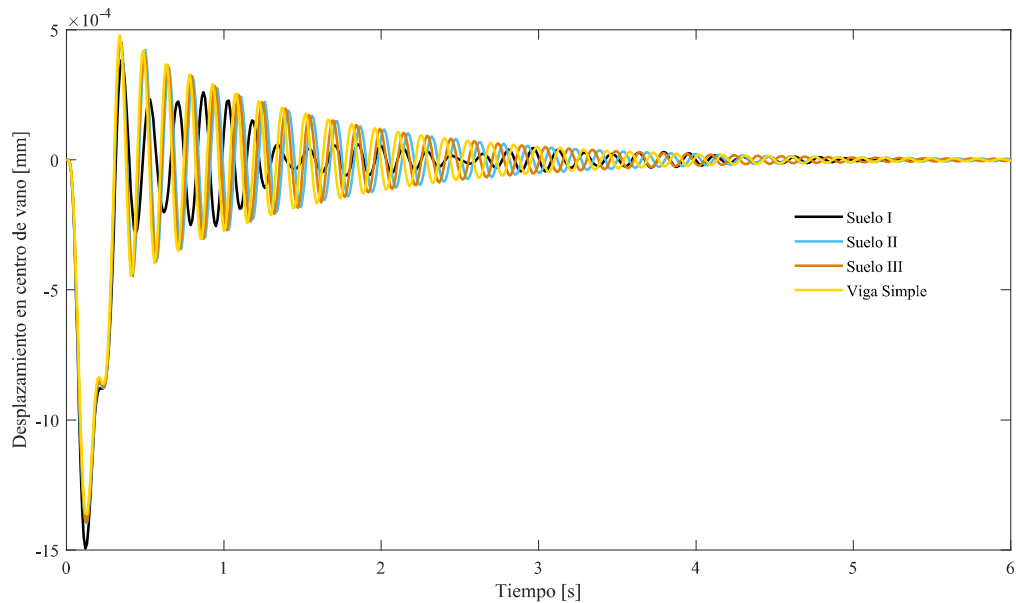


Figura 6.17. Desplazamiento en el centro de vano para los diferentes suelos considerados en los modelos sin elementos infinitos.

Se revelan varias circunstancias. Por un lado, en la respuesta obtenida de los modelos que no incorporan estos elementos, las diferencias entre los suelos II y III es mínima, y bastante inferior a la observada para los otros modelos, donde se puede observar como las oscilaciones crecen con la rigidez del suelo. Por otro lado, lo ya comentado con anterioridad, a los 6 segundos en el primer caso la vibración está totalmente atenuada no siendo así en el segundo. También salta a la vista el extraño comportamiento que exhibe la respuesta para el suelo más blando, tipo I. Los modelos sin elementos infinitos son más rígidos que los que los incorporan, en la Figura 6.17 se observa que la respuesta

obtenida para un suelo tipo III es prácticamente idéntica a la obtenida sin considerar terreno alguno, es decir, aplicándole las condiciones de contorno rígidas a los extremos del tablero.

Visto esto, cabe observar el contenido en frecuencia de las diferentes respuestas para cada modelo. Es evidente que, dada la carga a la que se somete la estructura, el comportamiento dinámico estudiado en este análisis será el correspondiente a la flexión del tablero. Es decir, la respuesta en el dominio de la frecuencia deberá revelar las frecuencias correspondientes a los modos de flexión del tablero. Aplicándole la Transformada Discreta de Fourier a las respuestas en el tiempo, con una frecuencia de muestreo de $f_s = \frac{1}{\Delta t} = 100 \text{ Hz}$, con Δt el paso de tiempo en la integración, con la herramienta MATLAB, obtenemos el contenido en frecuencia de las mismas.

Para el caso de la viga simple, sin consideración de suelo alguno, el contenido en frecuencia de la respuesta es el que se muestra en la Figura 6.18. Se representa la amplitud adimensionalizada a la amplitud máxima. A la vista de la misma se observa la presencia de ciertos picos que corresponden, como era de esperar, a frecuencias próximas a la naturales de la estructura. Recordar que el primer modo natural de flexión lleva asociada una frecuencia de 7 Hz, siendo de 24.5 y 34.47 Hz para el segundo y el tercer modo de flexión, respectivamente. La respuesta por lo tanto esta gobernada por los modos de flexión del tablero, como no podía ser de otra forma.

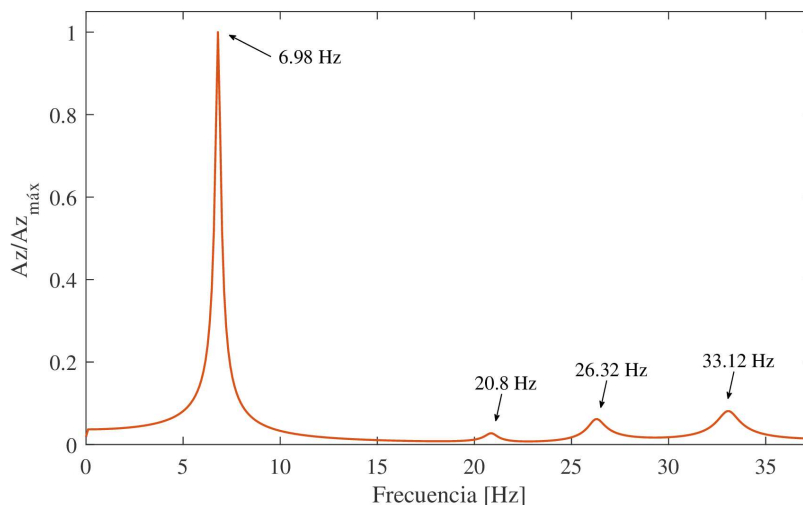


Figura 6.18. Contenido en frecuencia de la respuesta para el modelo de viga simple sin consideración del suelo.

Ahora bien, a continuación, se exponen las respuestas en el dominio de la frecuencia para los diferentes tipos de suelo, en comparativa de los modelos con y sin elementos infinitos. En la Figura 6.20 se muestra la respuesta en frecuencia para el suelo tipo I. Se observa que esta se presenta más suave en el modelo que implementa elementos infinitos, obteniéndose dos picos claramente diferenciados en las frecuencias de 6.65 y 32.7 Hz, algo menores a las frecuencias obtenidas del análisis modal para el primer y tercer modo de flexión. Por otro lado, se observa para el modelo sin elementos infinitos una respuesta que presenta diversos picos, obteniéndose el máximo para una frecuencia de 7.22 Hz por encima de la frecuencia natural correspondiente al primer modo, y superior al pico de la anterior respuesta (6.65 Hz).

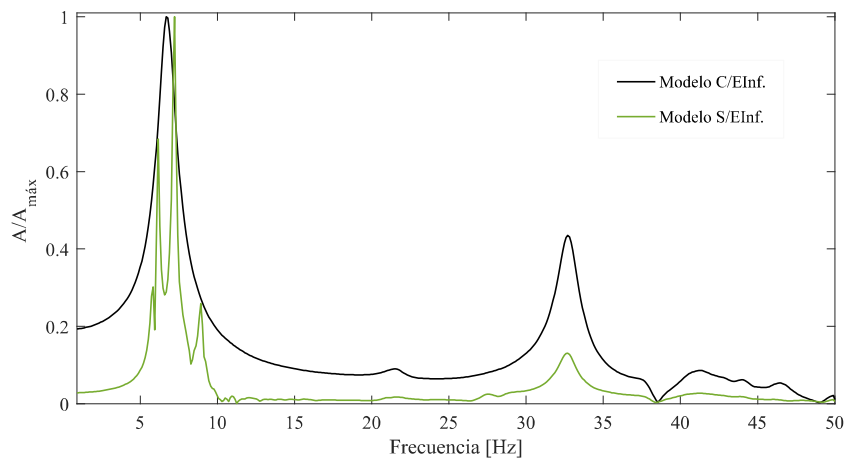


Figura 6.19. Contenido en frecuencia de la respuesta para el modelo con suelo tipo I.

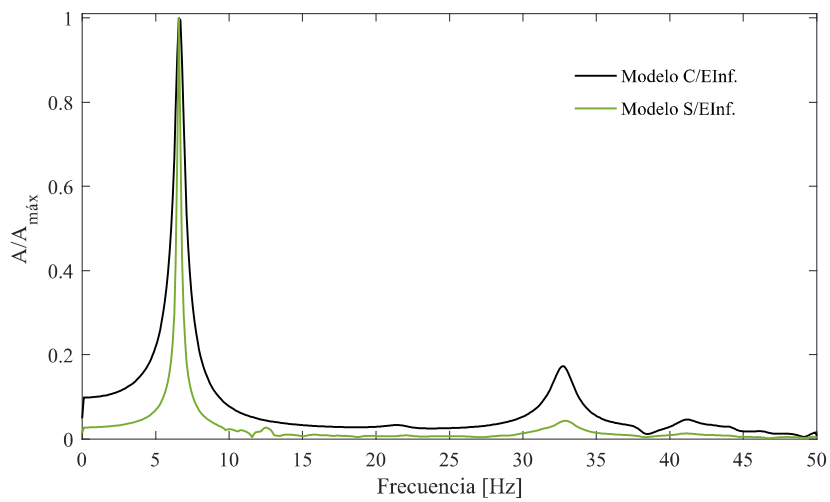


Figura 6.20. Contenido en frecuencia de la respuesta para el modelo con suelo tipo II.

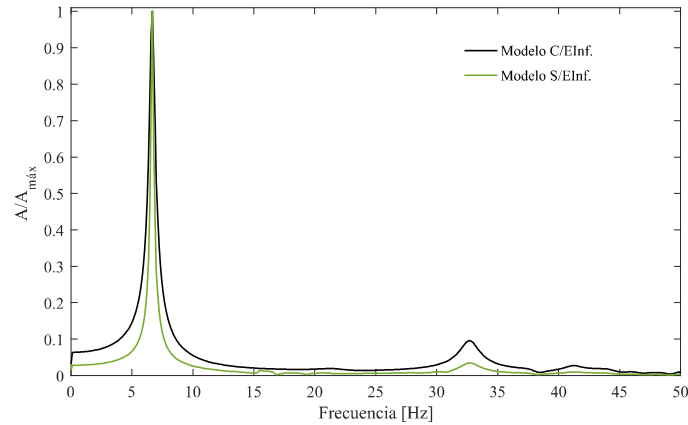


Figura 6.21. Contenido en frecuencia de la respuesta para el modelo con suelo tipo III.

El contenido en frecuencia para los suelos II y III se presenta muy similar. Dicha similitud se incrementa conforme aumenta la rigidez del suelo. Si bien es cierto, los resultados mostrados se han adimensionalizado a sus máximos correspondientes, haciendo imperceptible la diferencia de amplitudes: las amplitudes de desplazamientos y aceleraciones serán tratadas en el apartado siguiente.

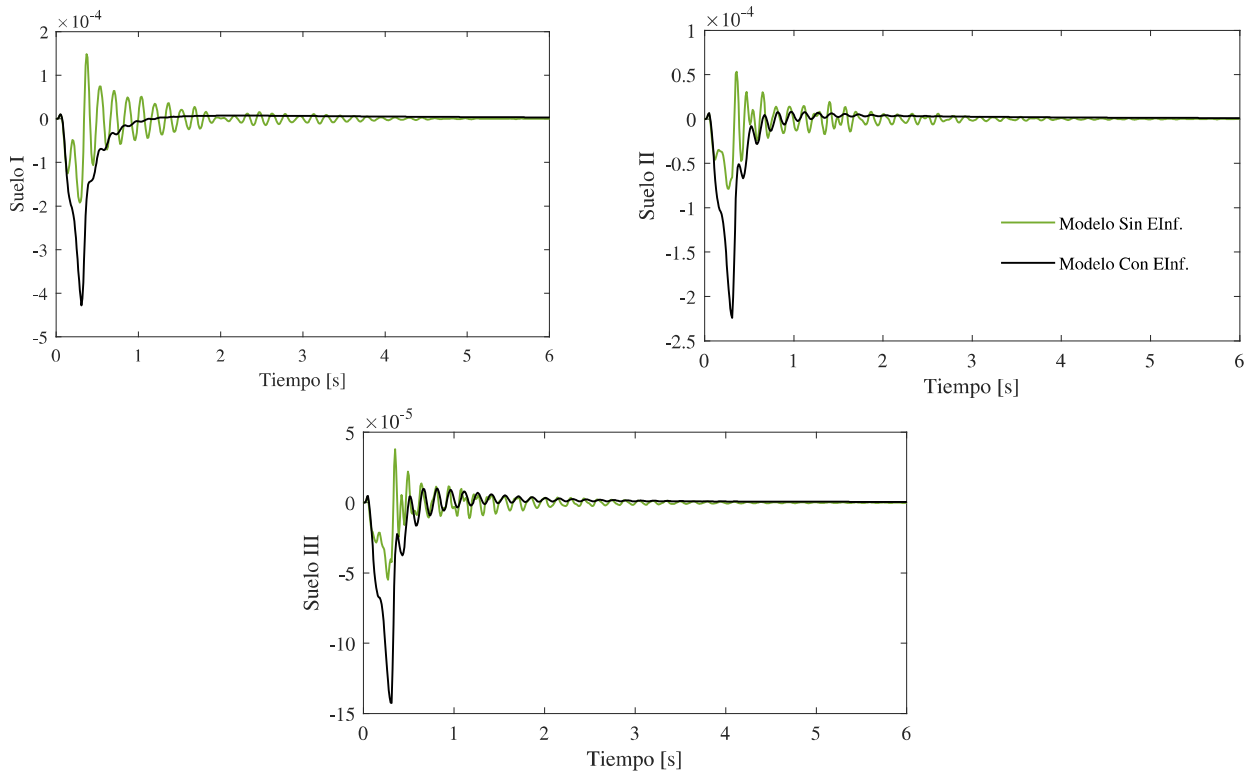


Figura 6.22. Asiento experimentado por un estribo para los diferentes suelos.

En la Figura 6.22 puede observarse el asiento que experimenta uno de los estribos para los diferentes suelos, y en ambos modelos. Se observa como las oscilaciones que este experimenta se acentúan en terrenos rígidos, siendo prácticamente nulas en el suelo tipo I. Estas oscilaciones adquieren

valores notablemente superiores en los modelos que no incorporan elementos infinitos. En todos los casos las diferencias entre usar uno u otro modelo son apreciables, siendo más notables para suelo menos rígido

Para cerrar este apartado, y de forma ilustrativa se muestran las siguientes figuras donde, para un suelo tipo III, se puede apreciar el campo de desplazamientos para diferentes instantes de tiempo, en modelos con elementos infinitos y sin ellos. Esto permite de forma cualitativa apreciar las diferencias en el comportamiento de ambos modelos.

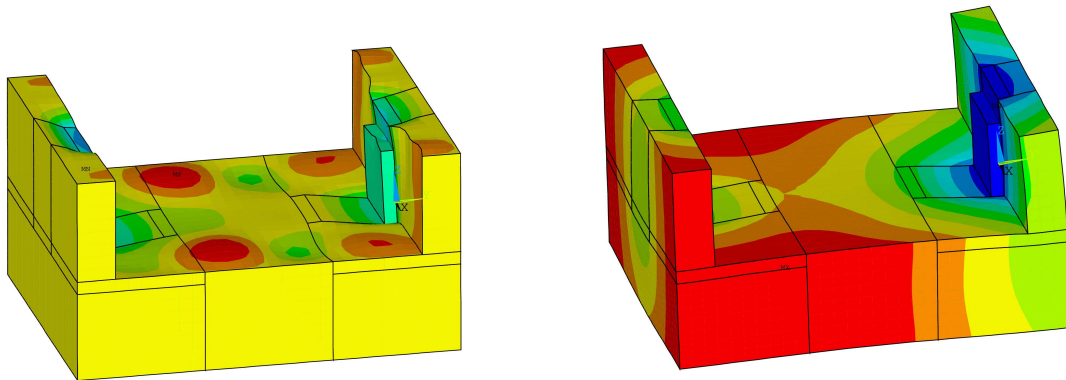


Figura 6.23. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.3 segundos.

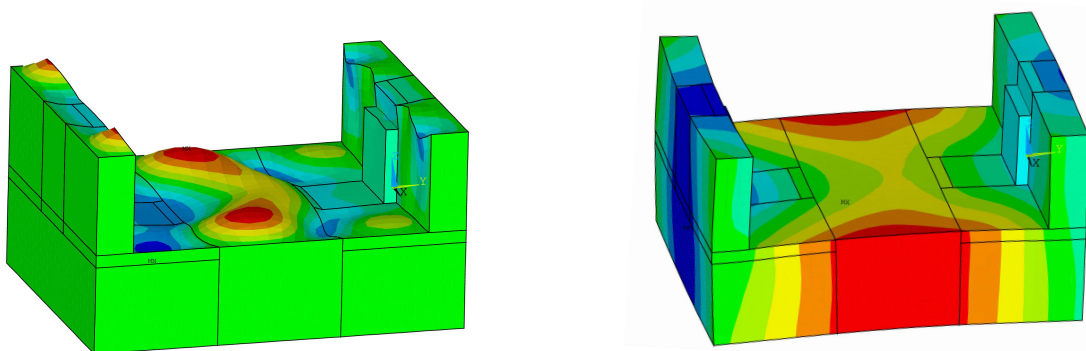


Figura 6.24. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.74 segundos.

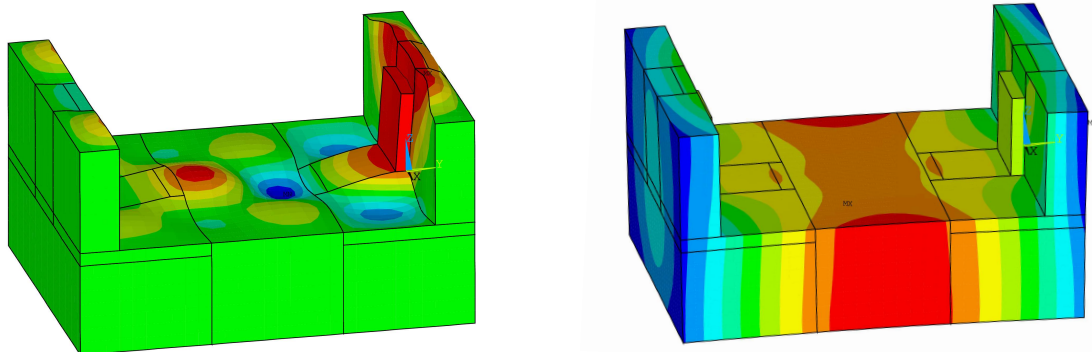


Figura 6.25. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 1.27 segundos.

En las figuras anteriores no se ha incluido el tablero, ni los elementos infinitos en su caso, de cara a observar el comportamiento que exhibe el suelo modelizado y los estribos. Se observan claras diferencias entre los modelos que incorporan elementos infinitos y los que no. En los modelos que incorporan estos elementos evidentemente en los contornos se observa un valor no nulo del campo de desplazamientos. Si observamos la capa de elementos infinitos se aprecia fácilmente como los desplazamientos se atenúan desde el contorno de los elementos finitos hasta el contorno de la capa de elementos infinitos (ver Figura 6.27)

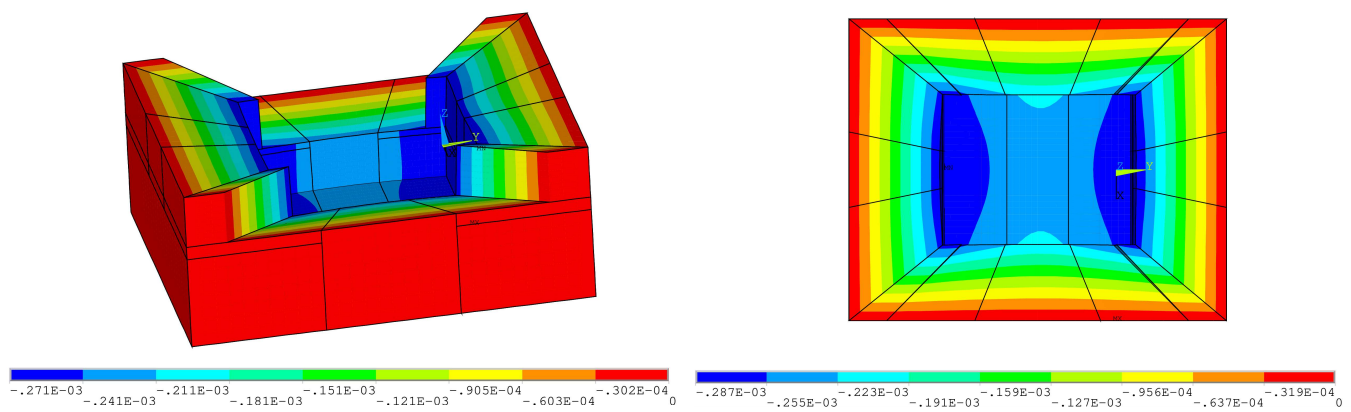


Figura 6.26. Campo de desplazamientos en los elementos infinitos para un tiempo de integración de 1.07 segundos.

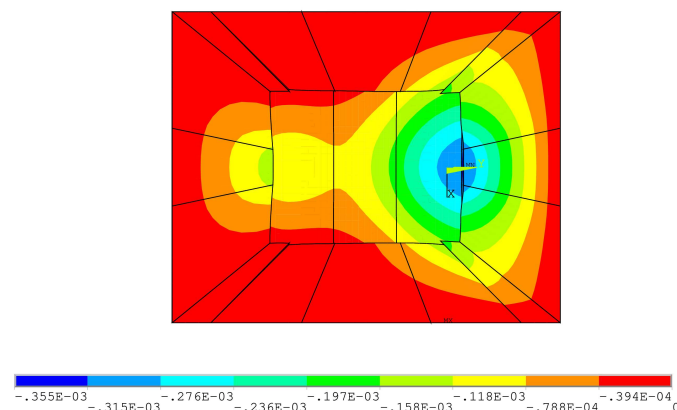


Figura 6.27. Vista en planta del campo de desplazamientos en los elementos infinitos para un tiempo de integración de 0.3 segundos

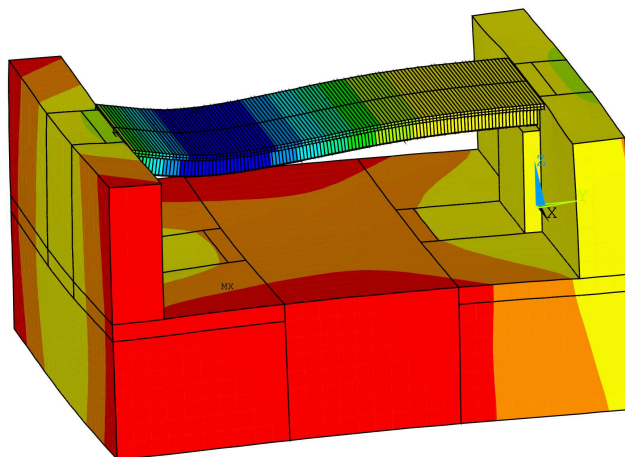


Figura 6.28. Deformada del tablero para un tiempo de integración de 0.4 segundos.

6.3.6 Resonancia y cancelación.

Todos los resultados presentados en el apartado anterior corresponden a una velocidad de circulación de la carga de 300 km/h. Si bien, el comportamiento de este tipo de estructuras depende fuertemente de la velocidad de las cargas móviles que las solicitan. Los fenómenos de resonancia y cancelación en puentes de ferrocarril son de gran interés de cara a su concepción y diseño. Diversos autores han estudiado el problema, abordándolo desde lo analítico hasta lo numérico, y ofreciendo así resultados interesantes bajo diversas condiciones desde las más simples para vigas simplemente apoyadas sometidas al paso de cargas aisladas [52] hasta modelos de tableros con condiciones de contorno elásticas [51] incorporando la interacción vehículo-estructura, suelo-estructura, influencia de las propiedades de la vía [53]

Este apartado tiene por objetivo estudiar la influencia tanto del suelo como de la disposición de los elementos infinitos en los modelos, de cara a la observación de estos fenómenos. Se someten los modelos empleados con anterioridad (para diferentes tipos de suelo y disponiendo o no de elementos infinitos en los contornos) a un barrido de velocidades, con el objetivo de obtener la respuesta del tablero en función de la velocidad. Se someterán por lo tanto al paso de una carga aislada de 210 kN a diferentes velocidades, desde 80 km/h hasta 340 km/h y se extraerá la respuesta en el centro de vano para cada caso.

Previo al análisis numérico conviene establecer la base de estos fenómenos dinámicos, para lo que se aborda el problema analítico de forma breve, el cual servirá para plasmar la idea básica y posteriormente ser comparado con los resultados numéricos.

6.3.6.1 Problema analítico: viga simplemente apoyada sometida a carga móvil.

Como se citó con anterioridad, en el problema de una carga móvil que solicita la estructura se diferencian dos regímenes dinámicos naturalmente diferentes: la vibración forzada y la vibración libre. En el primero de ellos, la carga se encuentra solicitando la estructura en algún punto, dependerá de diferentes factores que la respuesta resulte amplificada, obteniendo valores notablemente elevados y manteniéndose en el tiempo más de lo esperado: esto es el fenómeno de la resonancia. Fundamentalmente dependerá de las frecuencias naturales de vibración de la estructura y la frecuencia de excitación de la carga que la solicita, siendo cuando esta última se encuentra próxima a la frecuencia correspondiente a algún modo natural cuando la resonancia entre en juego. Deberá prestarse especial atención a este fenómeno de cara al diseño estructural.

Por otro lado, cuando la carga abandona la estructura, entre en juego la vibración libre de la estructura. Cuando la respuesta en vibración libre adopta valores muy pequeños o prácticamente nulos, se dice que se produce la cancelación de la vibración libre. Este es el segundo fenómeno a analizar aquí, y de nuevo, importante a la hora del diseño.

Considerar la viga simplemente apoyada, la cual se ve sometida a una carga móvil de valor P que la recorre a velocidad v , lo que provoca en la misma una deformación vertical $u(x, t)$ que ha de satisfacer la ecuación de equilibrio dinámico

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = P \delta(x - vt) \quad t \leq \frac{L}{v} \quad [6.8]$$

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad t > \frac{L}{v} \quad [6.9]$$

donde $\delta(x - vt)$ es la función delta de Dirac.

Abordando el problema mediante la superposición modal, asumimos la solución dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \phi_n(x) \quad [6.10]$$

siendo $\phi_n(x)$ el enésimo modo de vibración natural de la estructura y $\xi_n(t)$ la amplitud modal, función del tiempo. Para este caso sencillo de la viga simplemente apoyada los modos propios resultan ser funciones sinodales de la forma

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad [6.11]$$

Sustituyendo [6.10] y [6.11] en [6.8], se obtiene una ecuación para $\xi_n(t)$ cuya solución resulta,

$$\xi_n(t) = \frac{2P}{mL\omega_n^2} \frac{1}{1 - K_n^2} [\sin(K_n\omega_n t) - K_n \sin(\omega_n t)] \quad K_n \neq 1 \quad [6.12]$$

$$\xi_n(t) = \frac{2P}{mL\omega_n^2} \frac{1}{2} [\sin(\omega_n t) - \omega_n t \cos(\omega_n t)] \quad K_n = 1 \quad [6.13]$$

para el régimen forzado. Donde ω_n es la frecuencia natural de vibración del modo n , dada por $\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$; y K_n un parámetro conocido como la velocidad adimensional, dado por $K_n = \frac{\Omega_n}{\omega_n} = \frac{n\pi V}{\omega_n L}$ el cual relaciona la frecuencia de excitación Ω_n con la frecuencia natural.

Las solución [] proporciona las condiciones iniciales para el régimen de vibración libre $\xi\left(t = \frac{L}{v}\right), \dot{\xi}\left(t = \frac{L}{v}\right)$, gobernado por la ecuación

$$\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) = 0 \quad [6.14]$$

La solución a esta ecuación responde a un seno o coseno [52] cuya amplitud dividida por la amplitud estática $\xi_{nst} = \frac{2P}{mL\omega_n^2}$ proporciona la amplitud adimensional de la vibración libre, R_n

$$R_n = \frac{K_n \sqrt{2}}{1 - K_n^2} \sqrt{1 - \cos n\pi \cdot \cos \frac{n\pi}{K_n}} \quad [6.15]$$

Observando la evolución de R_n con respecto a la velocidad adimensional, K_n , para cada modo de vibración n , podemos apreciar que existen determinadas velocidades donde esta amplitud adquiere máximos relativos y otras donde esta amplitud se presenta nula, respondiendo las primeras a las velocidades de resonancia, K_{nres}^i y las segundas a las velocidades de cancelación de la vibración libre, K_{ncan}^i . (i numera la velocidad determinada, de mayor a menor valor)

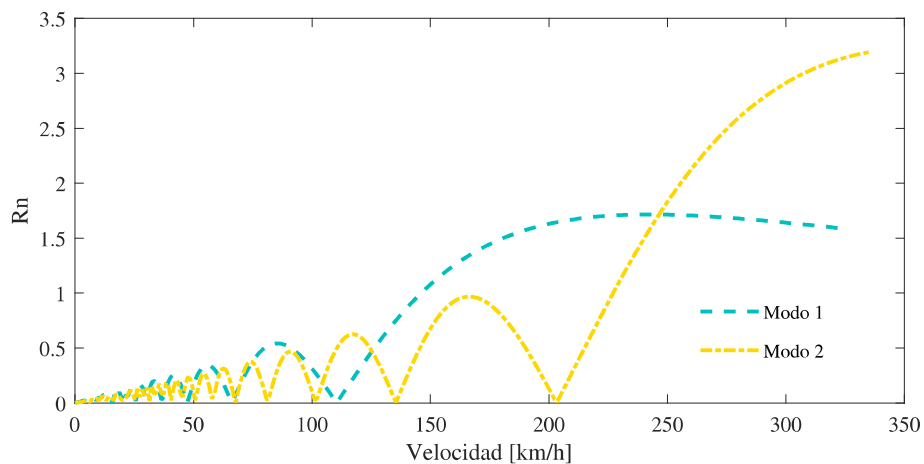


Figura 6.29. Factor R_n teórico frente a velocidad de la carga, para el primer y segundo modo.

6.3.6.2 Resultados del análisis: barrido de velocidades

Se realiza un barrido de velocidades en ANSYS para los modelos que se presentaron con anterioridad, para los suelos I, II y III, y el modelo de viga simple. El barrido comprende desde los 80 km/h hasta los 340 km/h, en intervalos de 10 km/h (suficiente para el objetivo que se persigue). Nótese que para obtener mejores resultados ha de barrerse con un intervalo menor. Se exponen aquí los resultados obtenidos para estos modelos.

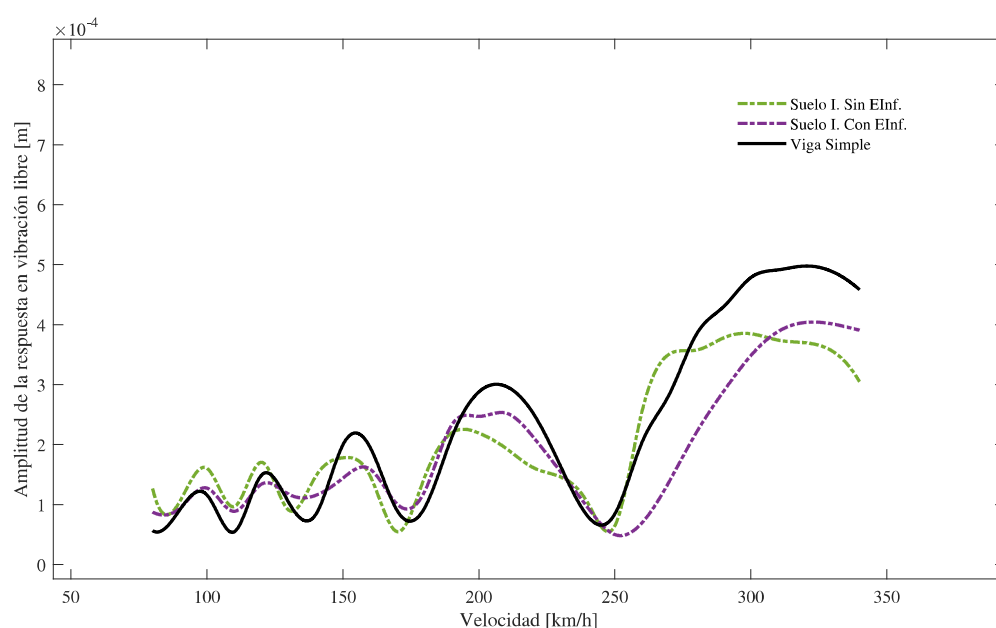


Figura 6.30. Amplitud de la respuesta en vibración libre para suelo tipo I.

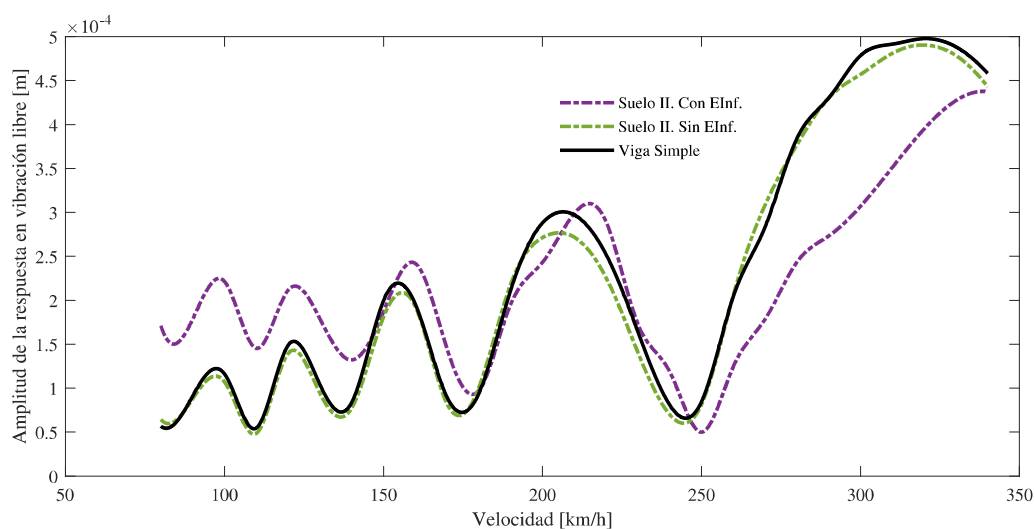


Figura 6.31. Amplitud de la respuesta en vibración libre para suelo tipo II.

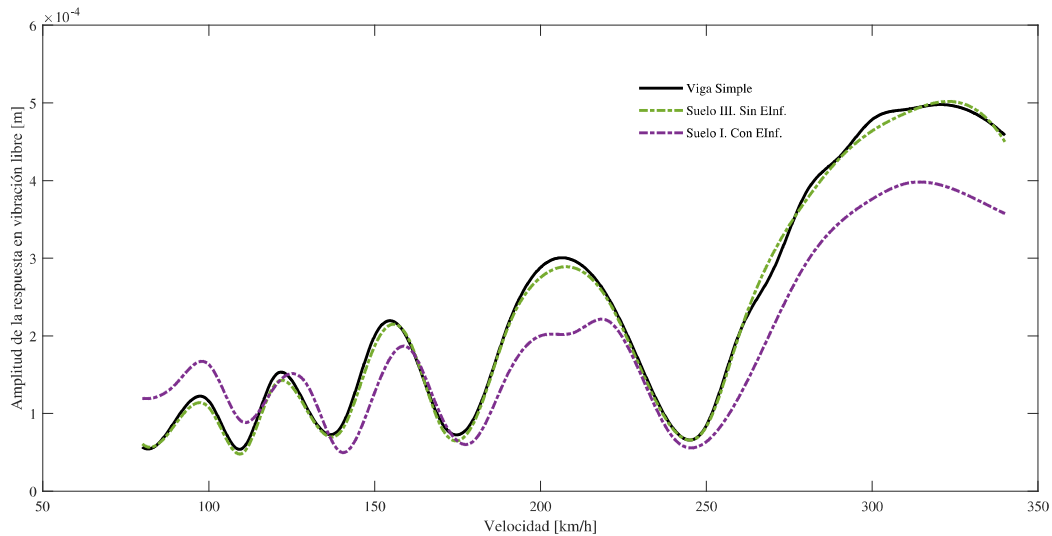


Figura 6.32. Amplitud de la respuesta en vibración libre para suelo tipo I.

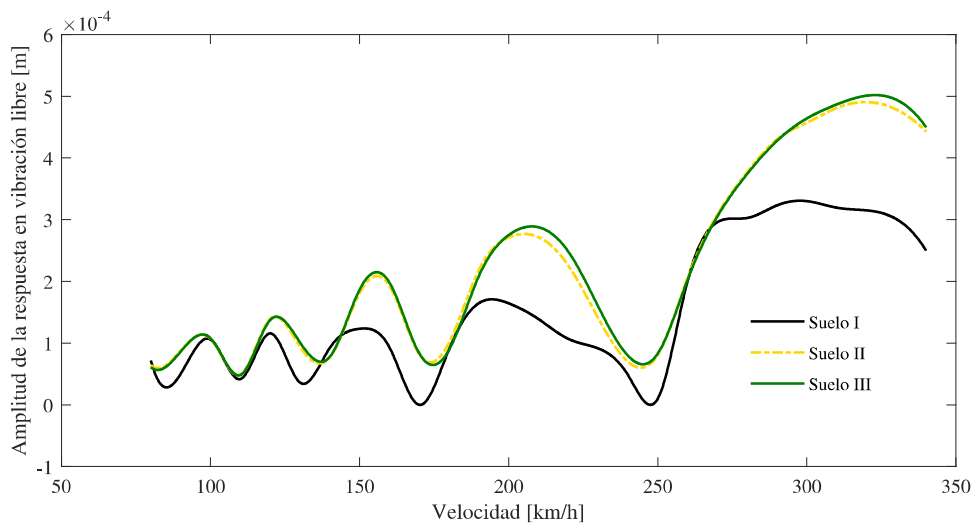


Figura 6.33. Amplitudes de la respuesta en vibración libre para los diferentes tipos de suelo. (Modelos sin elementos infinitos)

Se observan ligeras diferencias en las velocidades de resonancia (máximos de la respuesta) y cancelación (mínimos): acentuándose estas diferencias en la primera velocidad de resonancia. Se observa igualmente como la primera cancelación se desplaza a la derecha para modelos menos rígidos (suelo tipo I, y en general modelos con elementos infinitos). En las amplitudes de la respuesta encontramos claras diferencias, de forma general mayores amplitudes para modelos más rígidos (suelos II y III y modelos sin elementos infinitos). Los modelos que no incorporan elementos infinitos, sobre todo en suelos medianamente rígidos, tienden rápidamente a la respuesta de una viga simplemente apoyada. Esto no ocurre para aquellos que si los incorporan.

	Viga Simple	Suelo I		Suelo II		Suelo III	
		Con EInf.	Sin EInf.	Con EInf.	Sin EInf.	Con EInf.	Sin EInf.
Res 1	320	335	300	340	320	314	324
Can 1	245	254	248	249	245	246	245
Res 2	206	215	195	215	204	210	207
Can 2	176	177	170	177	173	178	174
Res 3	154	160	151	160	155	159	155
Can 3	136	142	132	140	138	140	137
Res 4	122	124	120	123	122	126	121
Can 4	109	111	110	110	110	111	110
Res 5	97	98	100	98	96	98	97
Can 5	81	84	85	83	82	81	81

Figura 6.34. Velocidades [km/h] de resonancia y cancelación para los diferentes modelos.

6.4 Conclusiones

En cuanto a la respuesta para el centro del vano en vibración forzada (con la carga sobre el tablero) se extraen de la figura 6.10 conclusiones claras: los desplazamientos adquieren mayores valores en suelos de menor rigidez, mientras que las aceleraciones verticales crecen conforme crece la rigidez del suelo. Esta tendencia se aprecia para los modelos con elementos infinitos, mientras que para aquellos en los que se establecen condiciones de contorno rígidas los desplazamientos adquieren un mismo valor prácticamente para todas las rigideces del suelo, no existiendo diferencia apreciable; mientras que las aceleraciones crecen rápidamente con la rigidez del suelo, aproximándose a las obtenidas para la viga simple.

Por otro lado, en régimen de vibración libre las oscilaciones del tablero se presentan mayores en suelos más rígidos, mientras que se presentan menores en suelos de rigidez más baja. Ocurre igual para las aceleraciones. Esto se observa de forma clara en los modelos con elementos infinitos, mientras que para los que no los incorporan las oscilaciones adquieren un valor prácticamente idéntico en todos los suelos, excepto para el suelo menos rígido donde el comportamiento observado es especialmente extraño. Además, en los modelos con elementos infinitos se observa como la respuesta en vibración libre se amortigua antes para suelos con menos rigidez, algo que no se recoge en los otros modelos donde todas las respuestas se amortiguan de la misma forma, y además a tiempos superiores con respecto a los modelos con elementos infinitos. (Figuras 6.17 y 6.18)

7 CASO DE APLICACIÓN. VIBRACIONES EN ESTRUCTURAS INDUCIDAS POR EL PASO DE CARGAS MÓVILES A ALTA VELOCIDAD

Es de especial interés el determinar la influencia que puede tener la circulación de trenes de alta velocidad en las proximidades de la vía por donde este circula. El fenómeno vibratorio está ligado al ferrocarril, por la propia naturaleza de las cargas que este conlleva, y su interés abarca desde lo técnico hasta lo social. Con el desarrollo de la alta velocidad se ha hecho indispensable el estudio de las vibraciones que este tipo de cargas induce en las zonas próximas a la vía, de cara a su afección a las estructuras cercanas, tanto desde el punto de vista de la seguridad estructural de las mismas como del confort de quienes se encuentren en ellas. La circulación del ferrocarril induce una serie de vibraciones en las cuales interviene tanto la interacción del vehículo con la vía, como la de la superestructura que contenga la vía con el suelo, por el cual dichas vibraciones se propagan en forma de ondas. Existe una relación entre las amplitudes de dichas ondas y la velocidad de circulación del ferrocarril, presentándose mayores conforme esta crece.

Día a día se hace más indispensable este tipo de estudios previos a la ejecución de proyectos ferroviarios y diversos autores y entidades ponen esfuerzo en ello. Podemos destacar en la actualidad como desarrollos en este ámbito a G.Lombaert et al. (2006), (2009); C.E. Hanson et al (2005); P.Galvín, A.Romero y J.Domínguez (2010) (2014) [37,38] que desarrollan y aplican modelos BEM-FEM tridimensionales para el análisis las perturbaciones ocasionadas por este tipo de cargas, entre otros.

En el presente capítulo se expone otro caso de aplicación a la implementación de elementos infinitos en los modelos de cálculo, en este caso, relacionado con este tema. Se genera un modelo de elementos infinitos que, de forma simple, recoge la respuesta de una determinada estructura ante el paso de una carga móvil a alta velocidad. Ni la tipología de la estructura, ni la precisa modelización de la carga móvil y la vía son el objeto del presente, siéndolo sin embargo, la determinación de la respuesta mediante diferentes modelos que permitan observar de forma clara la influencia de las condiciones de borde en este tipo de problemas, como se viene haciendo a lo largo del trabajo.

La idea es, de este modo, generar un modelo relativamente pequeño que incluya, por un lado, una carga móvil aislada que recorra una determinada longitud a una velocidad dada y por otro lado, una estructura que se encuentra a una cierta distancia de dicha perturbación. El modelo de elementos finitos en sus contornos se terminará, bien imponiendo las respectivas condiciones de borde que implican la nulidad del campo de desplazamientos en los mismos, o bien, estableciendo la existencia de una capa de elementos infinitos que simulen el carácter infinito del medio.

Se comienza describiendo brevemente los modelos generados para luego plasmar los resultados obtenidos de los mismos y extraer conclusiones.

7.1 Descripción del modelo

Los modelos desarrollados se resumen en uno solo. Se trata de un modelo que, por un lado, incluye el suelo, definido en un volumen relativamente pequeño, en la superficie del cual se encuentran tanto la vía por donde circula la carga, como la estructura a una distancia de esta. Se modelizará un volumen de suelo dado por un cuadrado de 30 metros de lado en una profundidad de 8 metros. Se dispone una estructura con planta rectangular de 8x4 metros propia de edificación, formada por unos pilares y unos forjados, cimentada sobre una losa superficial. Esto, evidentemente, será una simplificación del modelo. Por otro lado, la vía se sitúa a 15 metros de esta, con un ancho de 4 metros. Como se puede observar en la Figura 7.1 tanto la vía como la estructura se encuentran próximas a los contornos del modelo.

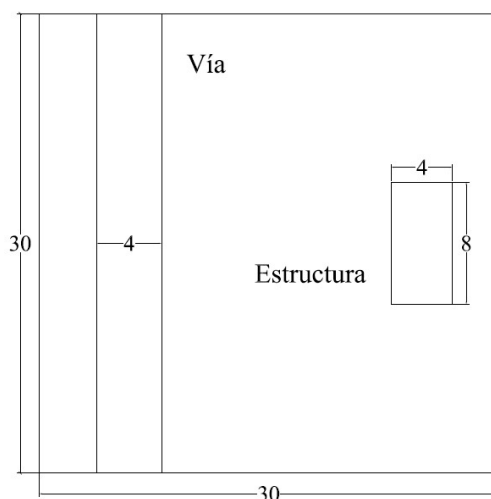


Figura 7.1. Esquema en planta del modelo empleado.

El modelo de elementos finitos se realizará con los elementos que se vienen empleando. El modelo de la estructura se realizará con elementos BEAM188 para los pilares y SHELL181 para los forjados y la losa. La vía por otro lado, supuesta un modelo simplificado de vía en placa, se modelizará con elementos SHELL181. El suelo por su lado, con elementos tridimensionales, SOLID185. Tanto para la vía como para la estructura se empleará un hormigón con un modulo de elasticidad lineal de 20 MPa, y el suelo se dotará de diferentes propiedades, manteniendo en todo momento un amortiguamiento del 5%. Los suelos empleados serán los presentados en el apartado 6.3.2. Se ignora el amortiguamiento estructural. La única diferencia, como ya se adelantaba, de los modelos con elementos infinitos respecto de los que no los incluyen serán precisamente estos. Disponiendo una geometría idéntica, se añadirán estos en los contornos del mismo.

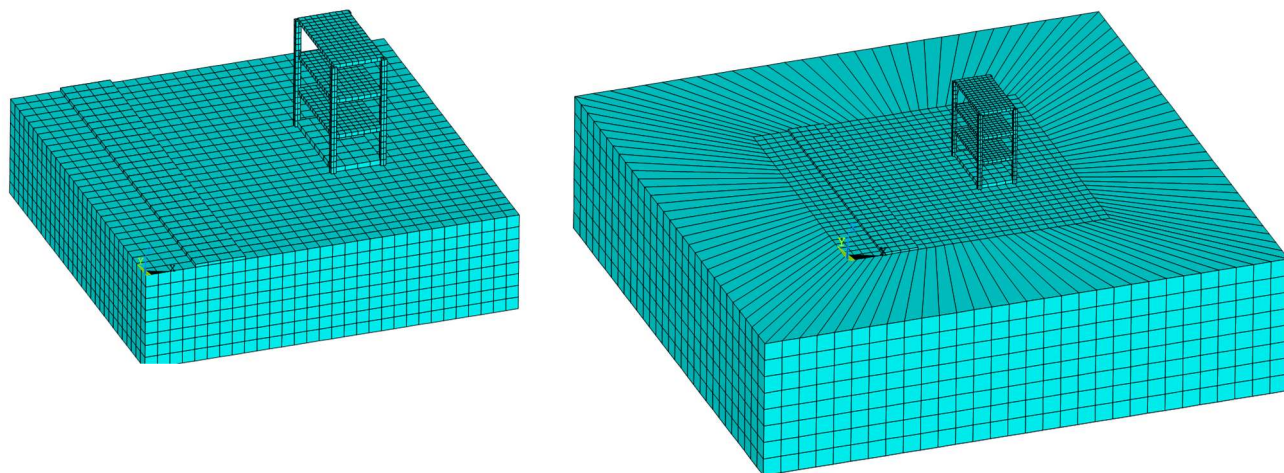


Figura 7.2. Modelos sin elementos infinitos (izquierda) y con elementos infinitos (derecha).

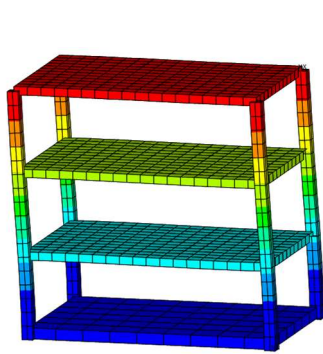
El mallado de la vía se realiza con un tamaño idéntico (concretamente 1 metro de lado) al mallado en el suelo, para el posterior acoplamiento de los grados de libertad de los nodos que queden coincidentes. Cabe destacar que se acoplarán los grados de libertad de desplazamientos, dado que son los que poseen los elementos tridimensionales. Los elementos tipo placa cuentan con grados de libertad de giro que quedarán desacoplados. Sobre los diferentes modelos se realiza un análisis transitorio, donde una carga puntual de 170 kN recorre la vía a 300 km/h por su línea central, de forma que se satisfaga la condición $dx = Vdt$, para lo que se elige un paso de tiempo para el análisis transitorio adecuado. Dicha carga genera una perturbación que se propaga por el suelo en forma de ondas, las cuales provocan una serie de desplazamientos en la estructura que se sitúa cercana. Es bien sabido de antemano que los mayores desplazamientos se experimentarán en los puntos más altos del edificio, por ello se recogerán los desplazamientos y aceleraciones de uno de los nodos del forjado superior. Este proceso se hará teniendo en cuenta diferentes tipos de suelos, de cara a establecer una comparativa entre ellos y determinar la influencia de los mismos, además de la implementación de elementos infinitos.

Cabe comentar que la edificación, como ya se ha dicho, se ha modelado de forma simplificada suponiéndola cimentada superficialmente y, además, supuesto un acoplamiento perfecto de los grados de libertad de los nodos contenidos en la losa y en el suelo para la zona de la interfase.

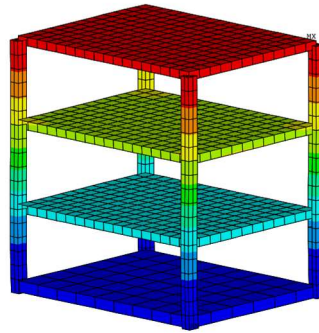
7.2 Frecuencias y modos naturales de vibración

Es interesante, previo a la generación del análisis transitorio, realizar un análisis modal de la estructura sin considerar la interacción con el suelo. Esto nos revelará las frecuencias y los modos de vibración naturales de esta estructura, dependientes únicamente de su masa y rigidez, cuando esta no está sometida a carga alguna.

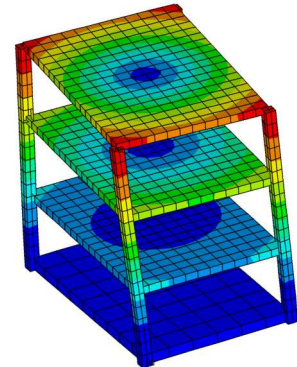
Pues bien, se realiza un análisis modal en ANSYS del cual se extraen los primeros modos de vibración, los cuales se pueden observar a continuación.



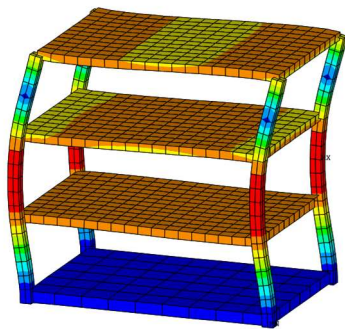
Modo 1. 1.28 Hz



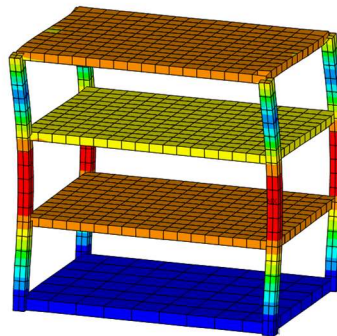
Modo 2. 1.32 Hz



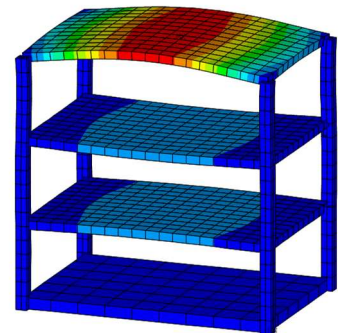
Modo 3. 2.11 Hz



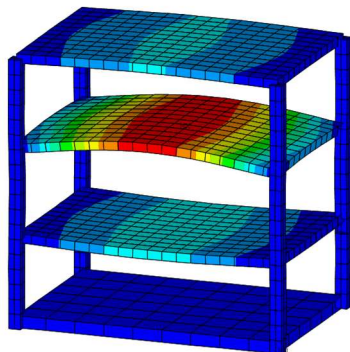
Modo 4. 4.82 Hz



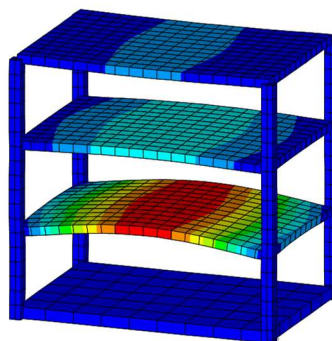
Modo 5. 4.9 Hz



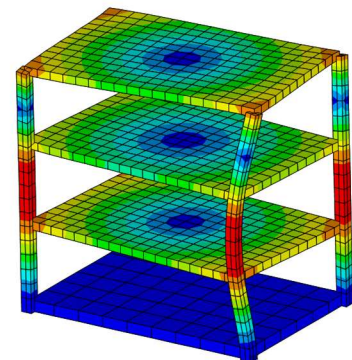
Modo 6. 5.34 Hz



Modo 7. 5.55 Hz



Modo 8. 5.61 Hz



Modo 9. 7.83 Hz

Figura 7.3. Nueve primeros modos naturales de vibración de la estructura.

El comportamiento estructural estará gobernado por los primeros modos de vibración, siendo estos los que requieren una menor energía de deformación, y así mismo, los fundamentales en la respuesta de la estructura ante una determinada sollicitación.

7.3 Respuesta estructural en suelo blando.

Se analiza la respuesta de la estructura cuando se trata de un suelo blando. Exactamente se trata del suelo tipo I con una velocidad característica de propagación de ondas S de 100 m/s y un módulo de corte de 17.5 MPa. La respuesta de la estructura se toma del forjado superior, de una de sus esquinas concretamente. Se establecen las diferencias entre las respuestas obtenidas mediante el modelo de elementos finitos, con una condición de restricción al campo de desplazamientos en todos los contornos del modelo, y el que incluye los elementos infinitos.

Para el caso de un suelo con las características del que aquí se emplea las diferencias son bien notables. Se puede observar que las aceleraciones (ver Figuras 7.4, 7.5 y 7.6) que experimenta la estructura en el modelo con elementos infinitos son muy inferiores en magnitud a las exhibidas en el otro modelo. Además, estas cesan mucho antes. Se puede observar como en el modelo sin elementos infinitos la tendencia de las aceleraciones sigue un comportamiento un tanto extraño en su amortiguamiento.

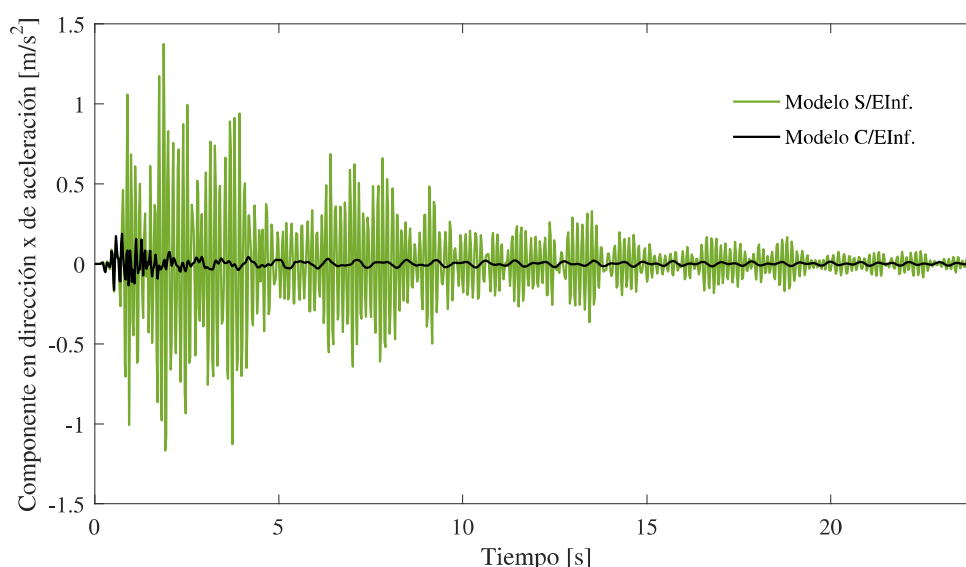


Figura 7.4. Aceleración en dirección x para un suelo tipo I en un punto del forjado superior.

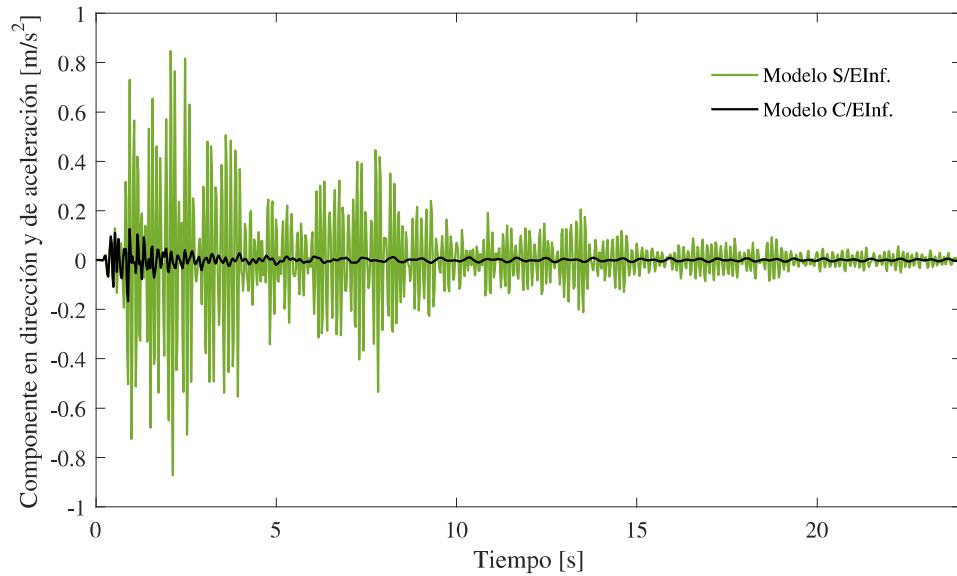


Figura 7.5. Aceleración en dirección y para un suelo tipo I en un punto del forjado superior.

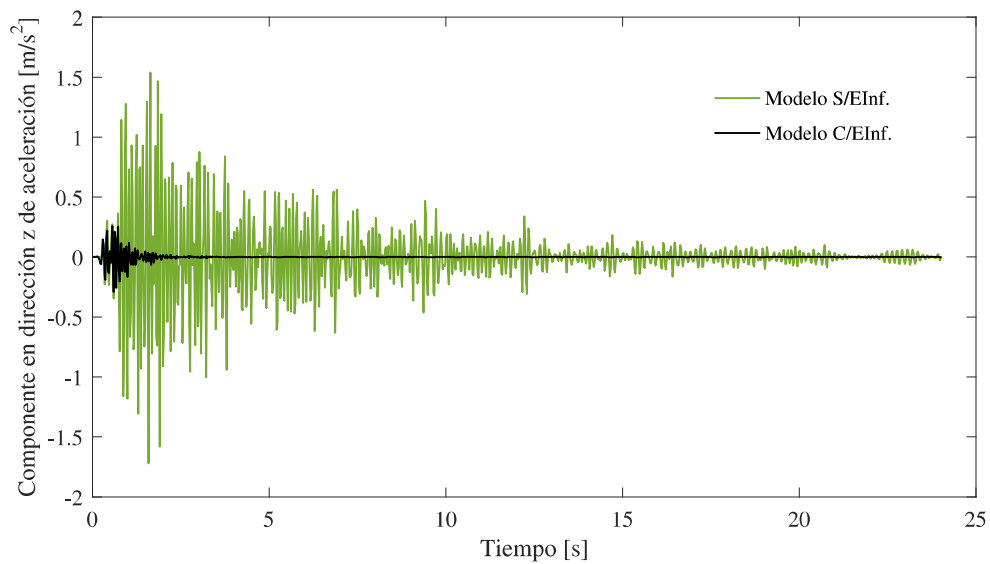


Figura 7.6. Aceleración en dirección z para un suelo tipo I en un punto del forjado superior.

La componente en dirección z global de aceleración se atenúa rápidamente en el modelo que cuenta con los elementos infinitos, no siendo así en el otro caso.

Por otro lado, a la vista de los desplazamientos del mismo punto, una vez que la carga ha cruzado el modelo, se observan de la misma forma diferencias claras en el comportamiento. Estas diferencias no son tan acentuadas en la amplitud del desplazamiento, donde también existen, como en la frecuencia de oscilación de los mismos, lo cual se puede observar a simple vista del registro en el dominio del tiempo.

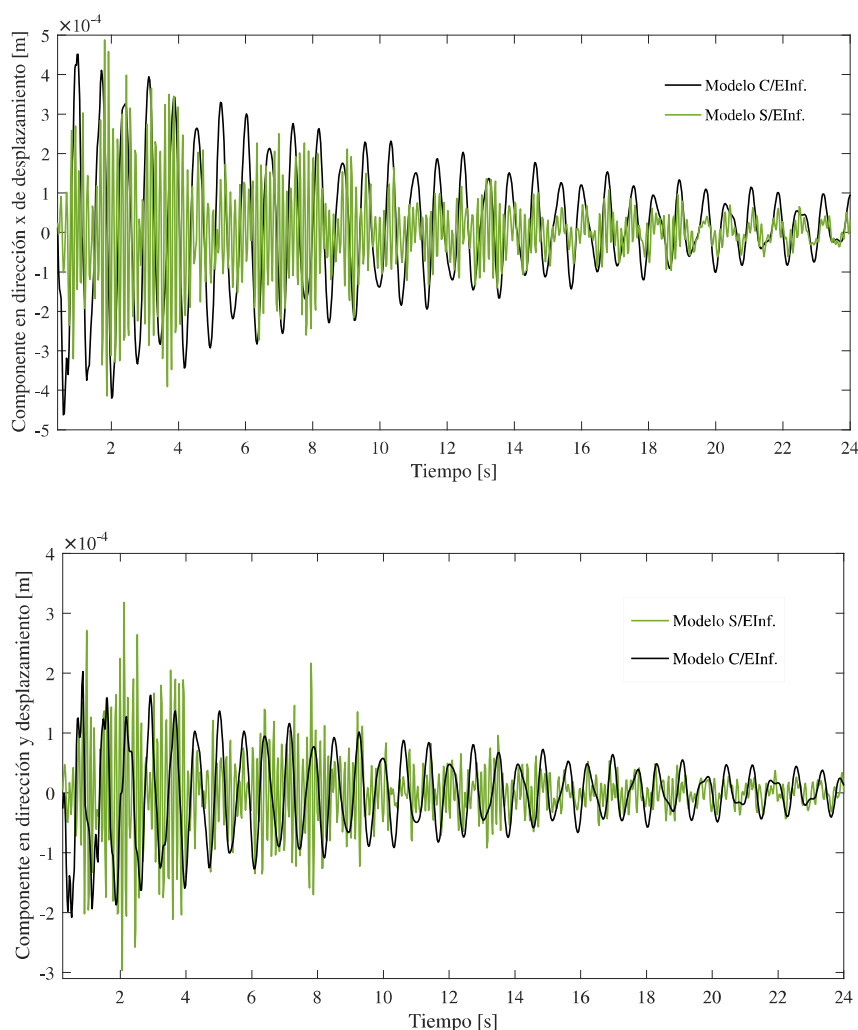


Figura 7.7. Desplazamientos horizontales para un suelo tipo I en un punto del forjado superior.

Las diferencias en amplitud más acentuadas se producen en la componente vertical del desplazamiento (dirección Z global), la cual adquiere valores superiores para el modelo sin elementos infinitos, siendo mucho menor para el otro. Debemos notar que en el comportamiento propio de edificaciones son los desplazamientos transversales (direcciones contenidas en el plano XY) los que intrínsecamente definen el mismo, siendo superiores a los desplazamientos producidos en la dirección perpendicular a dicho plano.

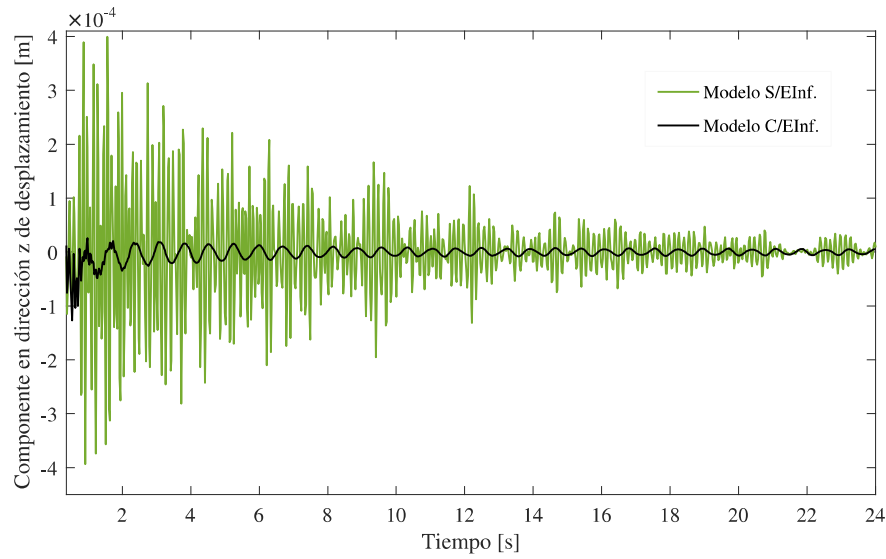


Figura 7.8. Desplazamiento vertical para un suelo tipo I en un punto del forjado superior.

Resulta esclarecedor extraer el contenido en frecuencia de las diferentes respuestas, pues siendo un registro mas limpio, se pueden extraer conclusiones interesantes sobre el comportamiento que se exhibe. Aplicándole en MATLAB la Transformada Discreta de Fourier a la respuesta en el tiempo, con una frecuencia de muestreo de $fs = 1/\Delta t$, con Δt el paso de tiempo en la integración, se obtienen las frecuencias predominantes en la respuesta estructural. Se realiza esto con las respuestas en las direcciones X e Y, por el motivo comentado anteriormente. En un primer instante se exponen las frecuencias adimensionalizadas a su valor máximo propio, de cara a localizar los picos de forma directa.

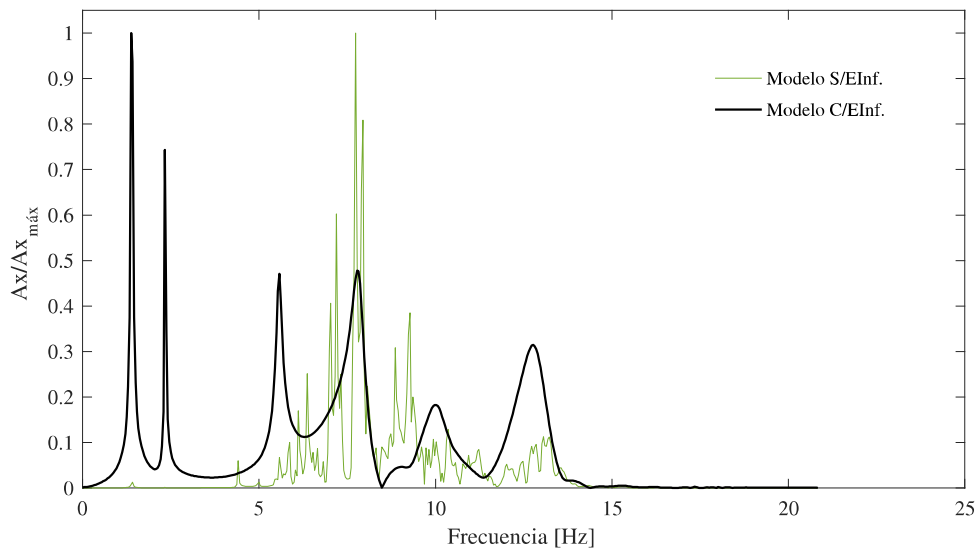


Figura 7.9. Contenido en frecuencia de la respuesta en dirección X para el modelo con suelo tipo I.

A simple vista se puede apreciar de forma clara como las frecuencias de vibración disminuyen en el modelo que cuenta con elementos infinitos. Los picos en el dominio de la frecuencia se encuentran notablemente desplazados con respecto al otro modelo. Esto ocurre tanto para la respuesta en dirección X global (Figura 7.9) como en dirección Y (Figura 7.10)

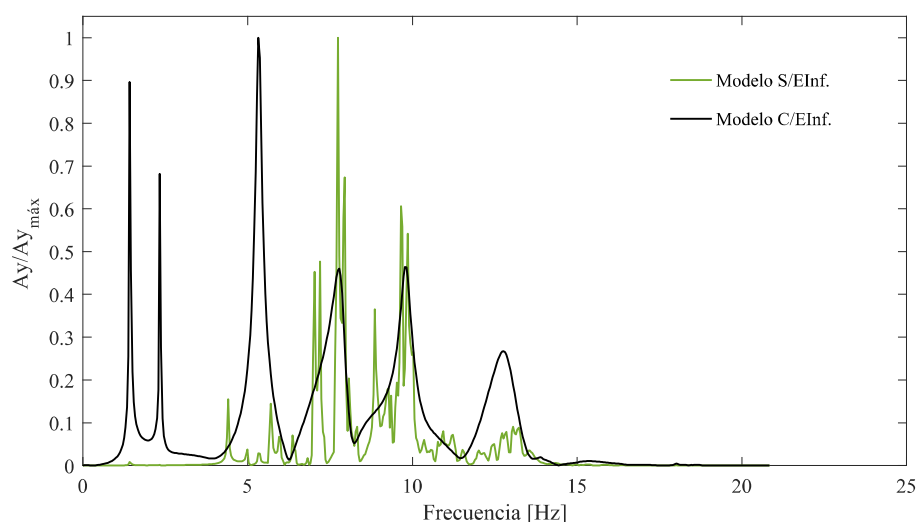


Figura 7.10. Contenido en frecuencia de la respuesta en dirección Y para el modelo con suelo tipo I.

Respuesta en X [Hz]	Respuesta en Y [Hz]	Modo	Frec. Naturales [Hz]
1.37	1.41	2	1.32
2.33	2.33	3	2.11
5.572	5.32	6	5.34
7.78	7.78	7	5.55
9.023	9.77	9	7.83
10.02	12.766	10	9.94
12.77	13.8	11	9.97
13.85	15.344	15	13.97
14.68	16.84	16	14.63

Tabla 7.1. Picos en frecuencia para las respuestas del modelo con elementos infinitos considerando suelo tipo I y frecuencias naturales de vibración obtenidas del análisis modal.

En la Tabla 7.1 se recogen, para el modelo con elementos infinitos, los picos en frecuencias obtenidos en las respuestas en X e Y y algunas de las frecuencias naturales de vibración de la estructura obtenidas del análisis modal. Se han incluido aquellos modos de vibración con frecuencias exhibidas por las respuestas obtenidas. Es decir, se observa claramente como en el contenido en frecuencia de las respuestas se manifiestan frecuencias muy próximas, en algunos casos iguales, a las frecuencias naturales de la estructura. Observando las amplitudes se deduce que son los primeros modos los que gobiernan la respuesta estructural. Sin embargo, de la respuesta obtenida del modelo que no incluye elementos infinitos no se puede afirmar lo mismo. Salta a la vista de la simple observación de las figuras la infinidad de picos de diferentes amplitudes que se obtiene. Si extraemos los picos de mayor amplitud observamos que el máximo corresponde a una frecuencia de 7.73 Hz, encontrándose estos valores máximos entre los 7 y los 10 Hz.

A continuación, se pueden observar los mismos resultados en verdadera magnitud, de cara a observar las diferencias entre ambos modelos. Observar que la amplitud se ha dividido por la frecuencia de muestreo, f_s .

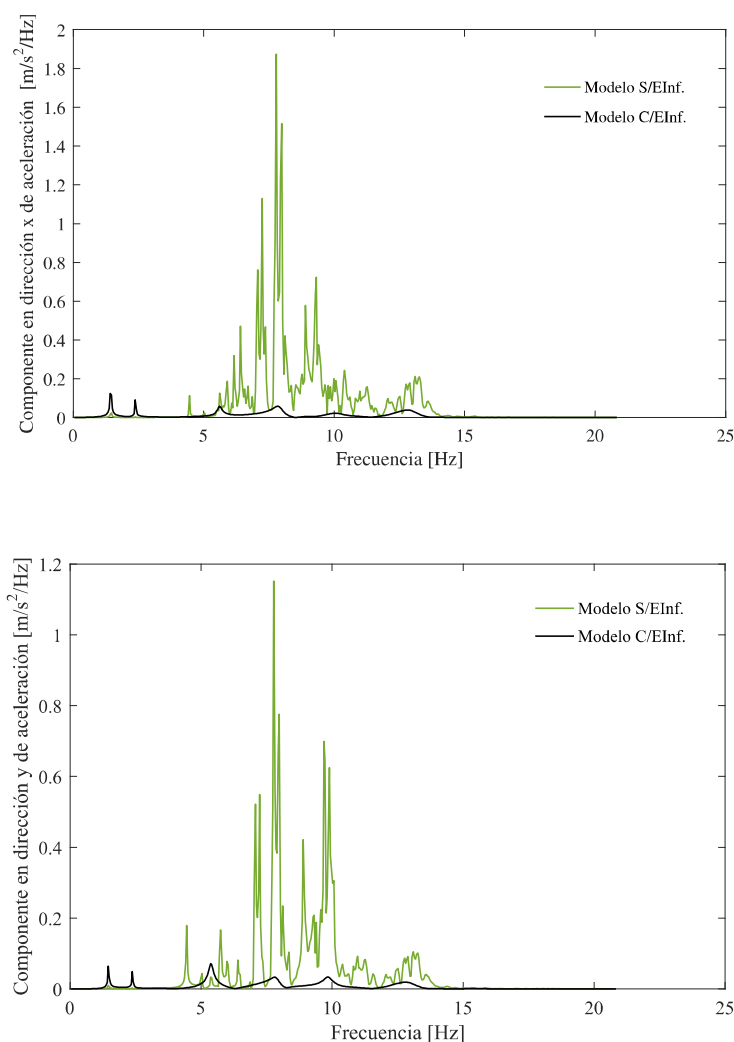


Figura 7.11. Contenidos en frecuencia para las respuestas horizontales.

Observando de esta forma, salta a la vista como las amplitudes en el modelo que no incorpora elementos infinitos se presentan muy superiores al que si lo hace, algo que ya se puso de manifiesto en el dominio del tiempo.

De nuevo el modelo que incorpora elementos infinitos permite la radiación de las ondas en el medio, atenuando estas en los contornos y evitando así su reflexión, algo que no se logra en el modelo que no los incorpora. En este segundo el comportamiento exhibido es poco natural, y se observa de forma clara en sus diferencias con el primero de estos. En las Figuras 7.12 a 7.15 se presentan los resultados, concretamente mapas de contorno de desplazamientos, para diferentes instantes de tiempo en uno y otro modelo. Las diferencias son claras: se observa como en el modelo sin elementos infinitos la perturbación al llegar a los contornos donde se impone la nulidad al desplazamiento se refleja, creando un comportamiento errático. Esto se observa inmediatamente pues no se modeliza suelo a gran distancia de la línea que sigue la carga. Sin embargo, es interesante observar como en el otro modelo el comportamiento exhibido es mucho mas natural: esta reflexión desaparece y permite a la perturbación propagarse saliendo del volumen ocupado por los elementos finitos y atenuándose rápidamente en la capa de elementos infinitos. Esto último se observa de forma clara en la Figura 7.16 donde se muestra la capa de elementos infinitos y podemos ver como los desplazamientos se hacen nulos en los contornos de esta capa, después de decrecer de forma paulatina desde el foco que los produce.

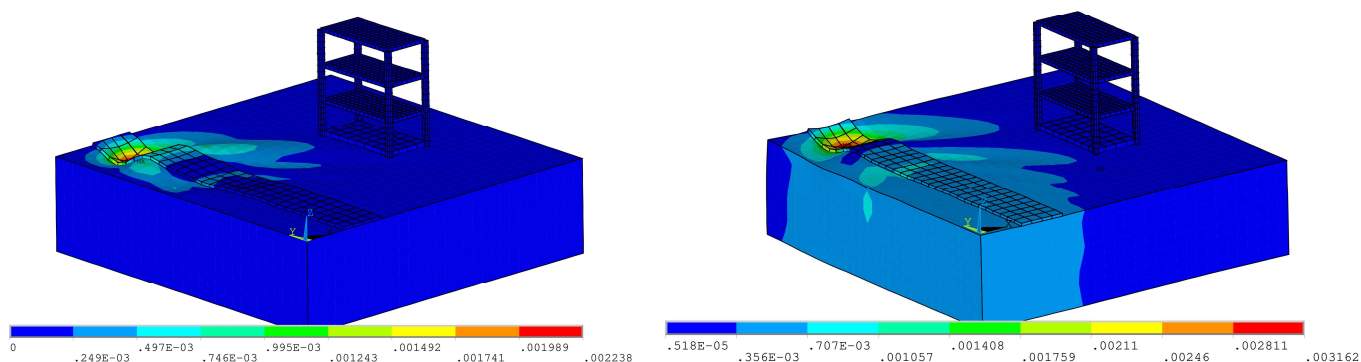


Figura 7.12. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.336 segundos.

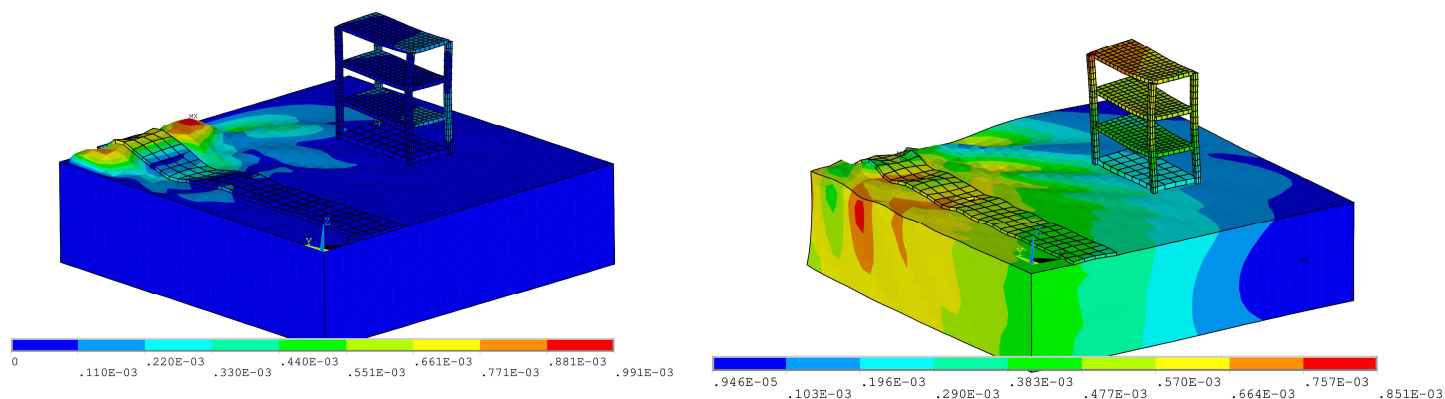


Figura 7.13. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.504 segundos.

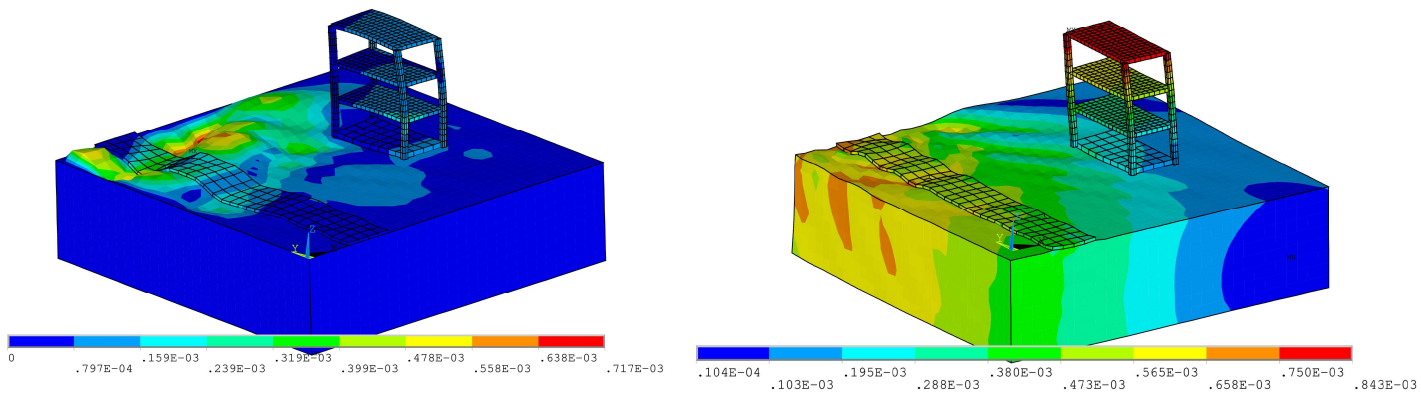


Figura 7.14. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 0.576 segundos.

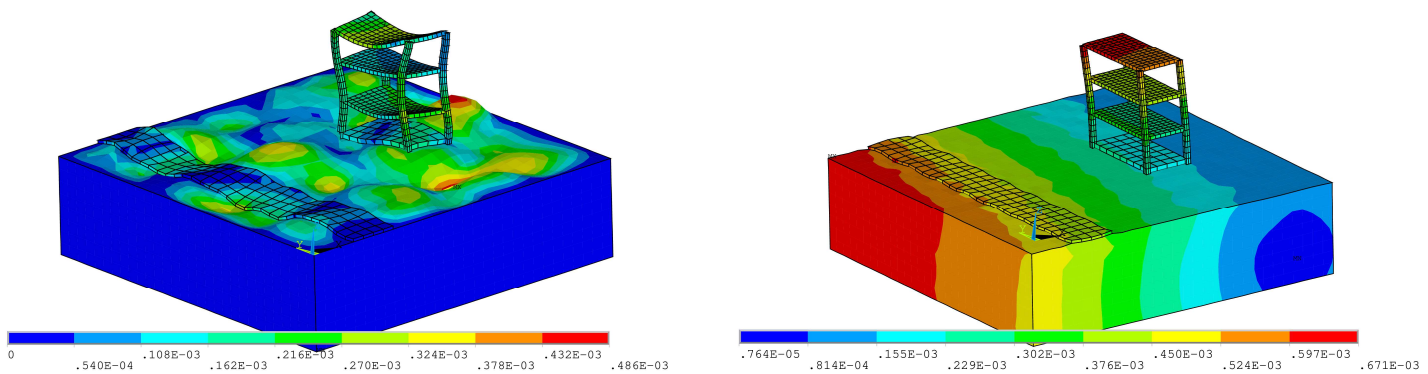


Figura 7.15. Campo de desplazamientos para un tiempo de integración de 1.44 segundos.

De forma cualitativa, a la observación de la Figura 7.13 para un tiempo de 0.336 segundos inferior al tiempo que tarda la carga en abandonar el modelo, 0.36 segundos, se observa una diferencia escasa entre ambos modelos, aunque puede observarse como el campo de desplazamiento adquiere valor nulo en el contorno del primer modelo no siendo de esta forma en el segundo. Las diferencias comienzan a hacerse notables cuando la carga abandona el modelo.

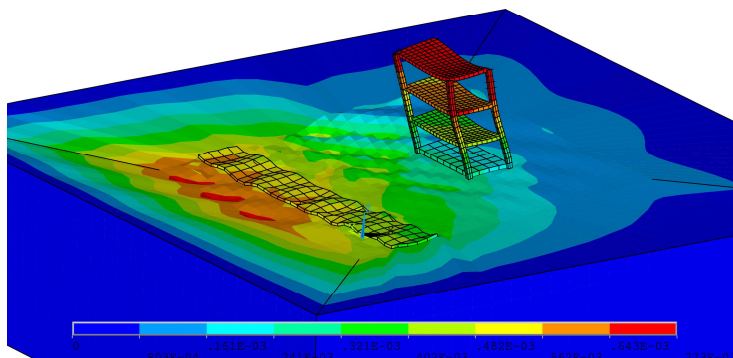


Figura 7.16. Campo de desplazamientos en los elementos infinitos.

7.4 Respuesta estructural en diferentes tipos de suelos

De la misma forma que se ha hecho en el apartado anterior, aquí se presentan los resultados obtenidos para el mismo modelo con la salvedad de que se emplean suelos de diferentes características. Se analiza la respuesta estructural, para el mismo punto del forjado superior, cuando se tienen suelos más rígidos. Se considera el suelo tipo IV como suelo de muy elevada consistencia con una velocidad de propagación de ondas S de 360 m/s y un módulo de corte de 226.8 MPa muy superior a los 17.5 MPa del suelo anterior; y un suelo tipo III como suelo de características medias, con una velocidad de propagación de ondas S de 220 m/s y un módulo de corte de 84.7 MPa. Se comparan los resultados obtenidos mediante modelo con y sin elementos infinitos.

La tendencia observada es bastante clara: la disposición de los elementos infinitos regula el comportamiento de la respuesta, acercándolo más a la realidad. Si observamos la Figura 7.17, en la cual se plasma la componente en x de aceleración para el modelo con elementos infinitos y los diferentes suelos, se puede apreciar como adquiere valores inferiores en amplitud en los suelos con mayor rigidez, sin embargo, la disminución es razonable, mientras que la Figura 7.18 muestra que los resultados para el modelo sin elementos finitos son extremos: esto es, los resultados para suelos rígidos se hacen inapreciables en comparación con los mismos para suelos menos rígidos.

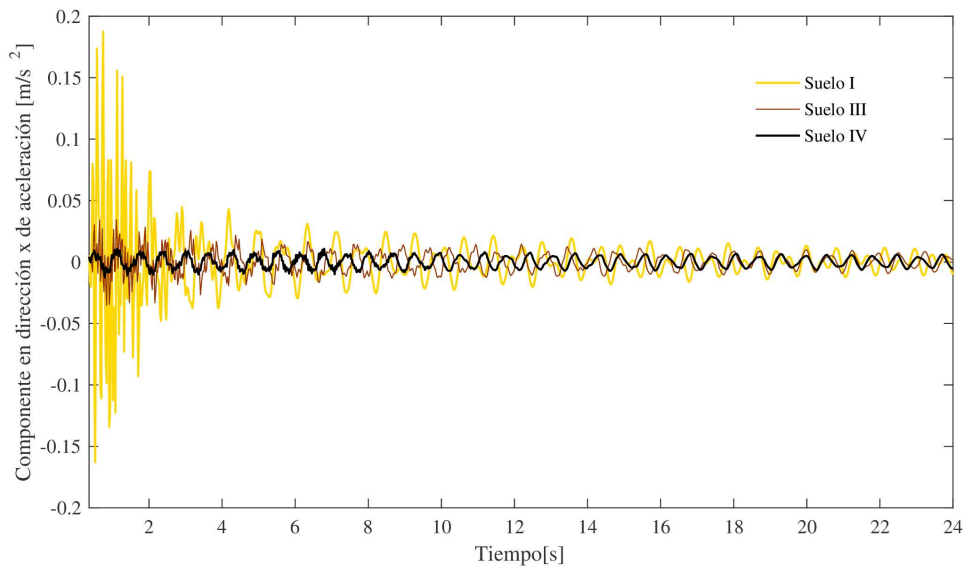


Figura 7.17. Aceleración en dirección X para los modelos con elementos infinitos.

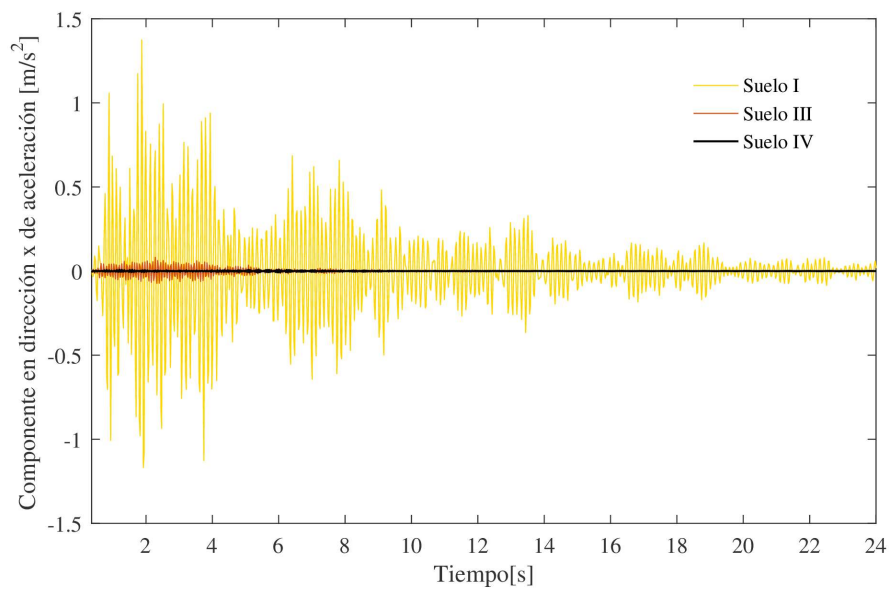


Figura 7.18. Aceleración en dirección X para los modelos sin elementos infinitos.

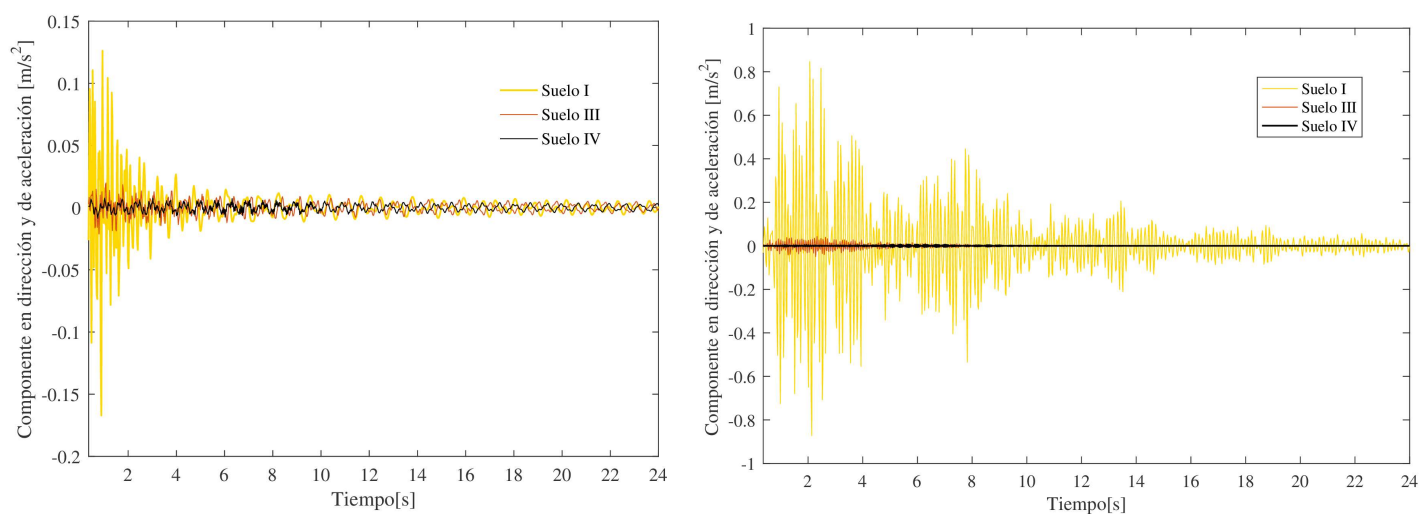


Figura 7.19. Aceleraciones en dirección Y para los modelos con elementos infinitos (izquierda) y sin ellos (derecha).

Ocurre de la misma forma para los desplazamientos: en los modelos sin elementos infinitos suelos rígidos estos se presentan muy inferiores, un orden de magnitud inferiores. Esto no ocurre así en los modelos con elementos infinitos, donde siendo menores, la diferencia no es extrema.

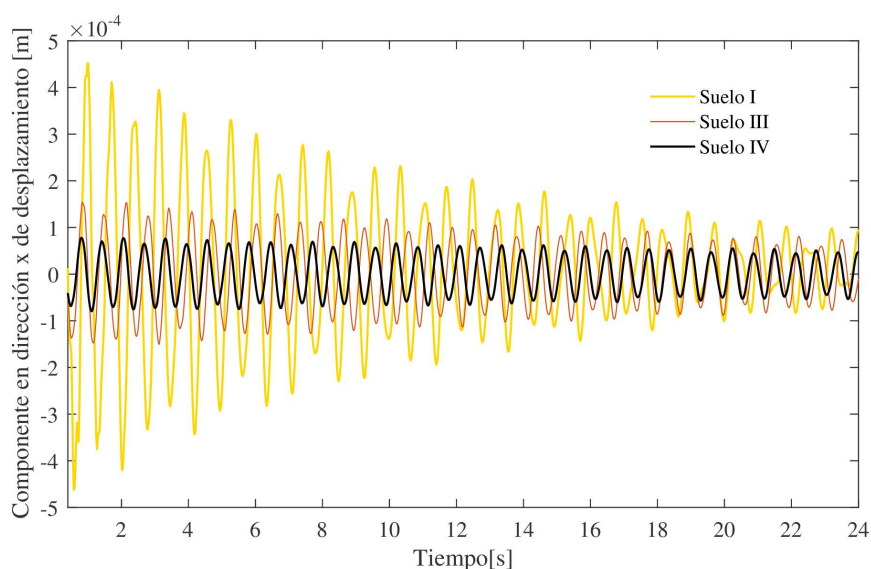


Figura 7.20. Desplazamiento en dirección X para los modelos con elementos infinitos.

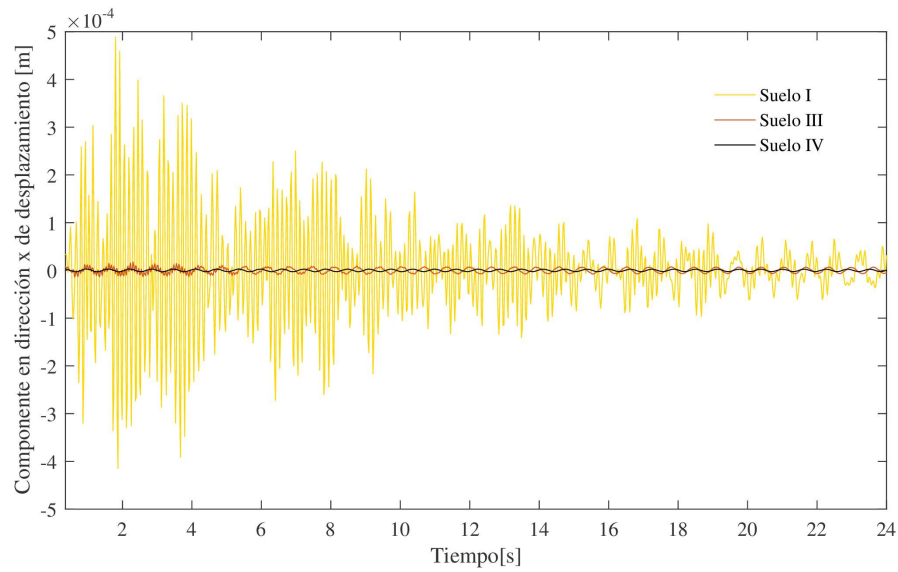


Figura 7.21. Desplazamiento en dirección X para los modelos sin elementos infinitos.

De la misma forma, se extrae el contenido en frecuencia para los diferentes tipos de suelo, y en ambos modelos. Se aprecia como para los modelos que no incorporan elementos infinitos ocurre lo ya comentado: los comportamientos son extremos. En suelo tipo I las amplitudes de la respuesta son muy superiores a las del suelo tipo IV que se presentan casi imperceptibles en comparación con estas.

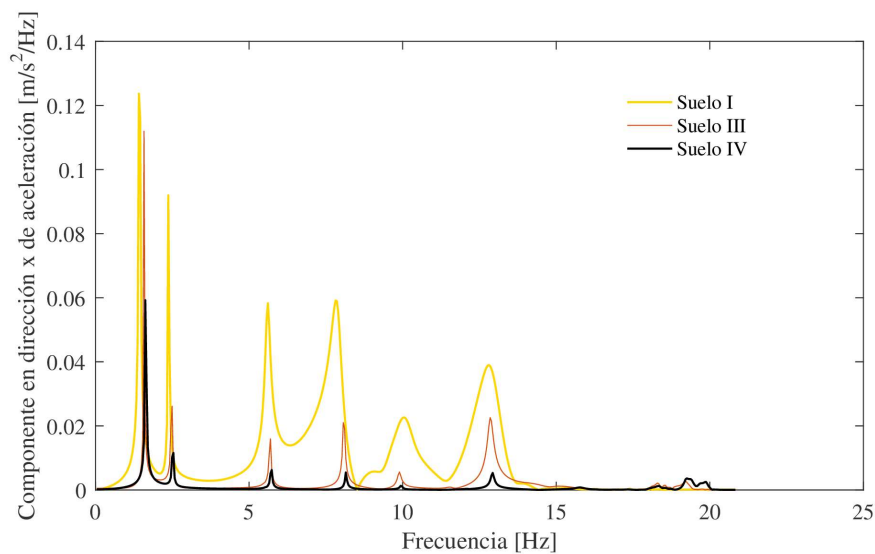


Figura 7.22. Contenido en frecuencia de la respuesta para los diferentes suelos considerados, en modelos con elementos infinitos.

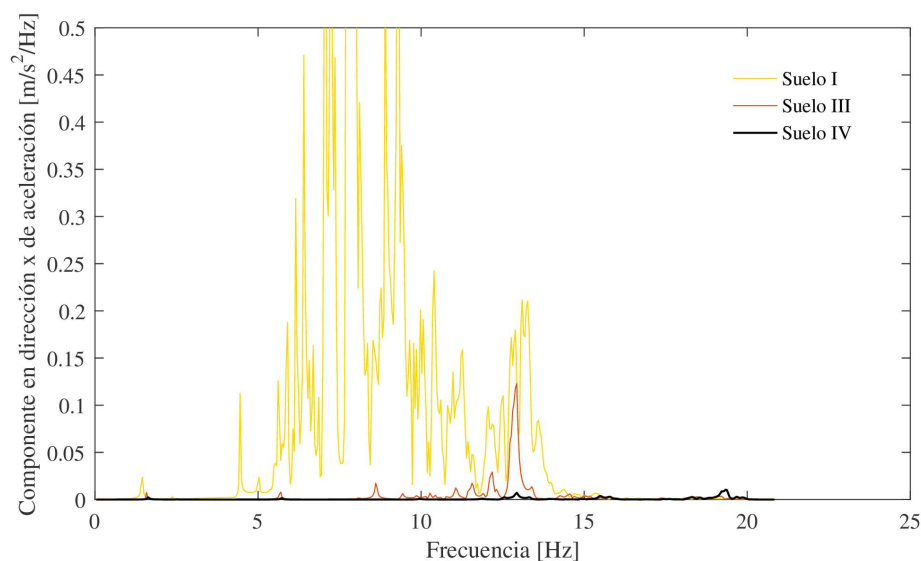


Figura 7.23. Contenido en frecuencia de la respuesta para los diferentes suelos considerados, en los modelos sin elementos infinitos.

Sin embargo, para los modelos que si implementan los elementos infinitos, la respuesta sigue la tendencia de menor amplitud para suelos más rígidos pero las diferencias son más razonables, no se obtienen resultados extremos. Podemos observar también como los picos se trasladan ligeramente a la izquierda según el suelo es menos rígido: es decir, la frecuencia disminuye conforme el suelo se hace menos rígido o consistente.

7.5 Conclusiones

A la vista de los resultados podemos concluir que los elementos infinitos dotan al modelo de regularidad. Es decir, para los modelos con condiciones de contorno rígidas se aprecia como la respuesta se extiende en el tiempo, amortiguándose muy lentamente; además, para suelos medianamente rígidos (III y IV) la respuesta es prácticamente inapreciable, siendo en suelos blandos (suelo I) notablemente elevada respecto de la anterior. Esto no sucede en los modelos con elementos infinitos. Además, las respuestas obtenidas de los modelos con estos elementos presentan menores frecuencias, que a su vez se presentan próximas a las frecuencias naturales de vibración de la estructura, extraídas del modal. Esto no ocurre en los modelos con condiciones de contorno rígidas: el comportamiento se presenta totalmente distante del anterior, apareciendo numerosos picos en la frecuencia de la respuesta, situados generalmente en mayores frecuencias, lo que indica una mayor rigidez de forma general.

8 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

Ha sido conforme se han ido presentado los resultados obtenidos cuando se han ido extrayendo conclusiones de los mismos, de modo que aquí solo queda hacer un repaso breve a las mismas. Como era de esperar, de forma general, los modelos empleados utilizando elementos finitos y estableciendo condiciones de contorno rígidas han ofrecido resultados erróneos. Los análisis armónicos para la obtención de las funciones de impedancia revelaban resultados totalmente alejados de la realidad, y nada comparables con los resultados ya obtenidos por diversos autores. Sin embargo, la disposición de los elementos que implemetan la formulación PML proporcionaba resultados completamente diferentes a estos, y muy próximos a los obtenidos mediante otras técnicas comentadas, como modelos de elementos de contorno.

Es cierto que los elementos PML disponibles en el software ANSYS solo se presentan válidos para análisis en el dominio de la frecuencia, tal como se han ejecutado. Resultaría interesante aplicar esta formulación a la resolución de problemas transitorios en el dominio del tiempo, y establecer comparaciones con los resultados obtenidos de los modelos con elementos infinitos. No se ha dedicado ningún apartado en el trabajo a enfrentar resultados obtenidos por medio de estas dos técnicas, para problemas idénticos, tanto en la frecuencia como en el tiempo, algo que resultaría positivo de cara a observar las ventajas de una técnica frente a la otra.

Los problemas resueltos mediante elementos infinitos han revelado lo que se presagiaba: claras diferencias en las amplitudes de las respuestas obtenidas, diferente comportamiento en cuanto al amortiguamiento de la vibración libre (los modelos con condiciones de contorno de nulidad en los desplazamientos se presentaban mucho más rígidos prolongando la vibración libre de los sistemas, tanto en el tablero del puente como en la estructura del edificio); diferencias en las frecuencias de vibración exhibidas por las estructuras respecto de los modelos más simples que no tienen en cuenta la existencia del terreno.

Las simplificaciones han sido numerosas, comenzando por el modelo de suelo. Se propone la aplicación de modelos de comportamiento no lineales, incluyendo amortiguamiento viscoso en el mismo, de cara a observar las diferencias que presentan las respuestas respecto de las obtenidas suponiendo este modelo de comportamiento. Otras simplificaciones adoptadas han sido, en primer lugar el acoplamiento de los grados de libertad en la interfase de las cimentaciones: se propone modelizar de forma más rigurosa este comportamiento mediante elementos de contacto y estableciendo un análisis no lineal, lo que ofrecería resultados más realistas; en segundo lugar, la misma idea aplicada a la cimentación del edificio, la cual se ha supuesto superficial y de forma *soldada* al suelo.

Tanto los modelos del puente viga como los de la carga circulando a alta velocidad en la proximidad de la estructura admiten infinidad de mejoras: inclusión de la interacción vehículo-estructura, de las propiedades de la vía tales como balasto, rail pads, y demás elementos presentes en este tipo de estructuras; además de efectuar análisis más allá de las cargas aisladas, modelizando la circulación de diferentes vehículos presentes en la normativa (IAPF p. ej)

Todas estas mejoras, y más, se presentan como prácticas interesantes de cara a mejorar los resultados de este tipo de problemas, empleando modelos de elementos finitos.

REFERENCIAS

- [1] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor y J. Z. Zhu. *The Finite Element Method*.
- [2] Manual ANSYS. *Mechanical APDL theory reference*.
- [3] Domínguez. J. *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, Southampton, (1993).
- [4] U. Basu, A.K. Chopra. *Perfectly Matched Layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains: theory and finite-element implementation*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192 (2003) 1337-1375
- [5] Steven G. Johnson. *Notes on Perfectly Matched Layers (PMLs)* Aug. (2007)
- [6] I. Gomez-Revuelto, L. E. Garcia-Castillo, and L. F. Demkowicz. *A comparison between PML, Infinite Elements and an iterative BEM as mesh truncation methods for hp self-adaptive procedures in electromagnetics*. Progress In Electromagnetics Research, Vol. 126, 499-519, (2012)
- [7] G. Gazetas. *Formulas and charts for impedances of surface and embedded foundations*. Journal of Geotechnical Engineering. Vol. 117, No.9. Sept. 1991. ASCE.
- [8] H.L. Wong and J.E. Luco. *Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, 579-587 (1976)
- [9] Martínez Cutillas A., Alarcón Alvarez, E. *Rigidez dinámica de estribos de puentes*. Hormigón y acero. Nº191, (1991)
- [10] Choon-Gyo S., Chung-Bang Y., and J.M. Kim. *Cuboidal Infinite Elements for Soil-Structure-Interaction analysis in multi-layered half-space*. 4th International Conference on Earthquake Engineering. Paper No.5 Oct (2006)
- [11] C. B. Yun., and J.M. Kim. *Dynamic Infinite Elements for Soil-Structure Interaction Analysis in a Layered Soil Medium*. Computational Methods in Engineering and Science. EPMESC X. Aug. (2006)

[12] C. Barbier, P. Bettés and J. A. Bettés. *Automatic Generation of Mapping Functions for Infinite Elements using REDUCE*. J. Symbolic Computation (1992) 14, 523-534.

[13] G. Beer and J.L. Meek. *'Infinite Domain' Elements*. International Journal for numerical Methods in Engineering, Vol. 17, 43-52 (1981)

[14] P. Bettés. *More on Infinite Elements*. International Journal for numerical Methods in Engineering. Vol 15, 1613-1626, (1980)

[15] J. Lysmer, Roger L. Kuhlemeyer. *Finite Dynamic Model for Infinite Media*. Journal of the Engineering Mechanics Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers. EM-4. 6719. Aug. (1969).

[16] F. Collino, C. Tsogka. *Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamics problem in anisotropic heterogeneous media*. Geophysics, vol. 66, pp. 294-307, (2001).

[17] E. Alarcón. *Respuesta dinámica de suelos*. Física de la Tierra, núm 1. 309-356. Ed. Univ. Compl. Madrid, (1989)

[18] Díaz-Rodríguez, J. A. *Caracterización dinámica de los suelos. Ensayos de campo y laboratorio*. Course on seismic engineering and soil dynamics. UNAM.

[19] N. M. Newmark. *Method of Computation for Structural Dynamic*. ASCE Journal of Engineering Mechanics Division. Vol. 85. 67-94. 1959.

[20] K. J. Bathe. Prentice-Hall. *Finite Element Procedures*. Englewood Cliffs. 1996

[21] Reissner E. *Stationäre, axialsymmetrische durch eine Schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes*, Ingenieur-Archiv, Vol. 7, Part 6, Dec., 381-396. (1936)

[22] Veletsos A.S., Wei Y.T. *Lateral and rocking vibration of footings*. Journal of Soils Mechanics and Foundation Division – ASCE, Vol. 97, No. SM9, pp. 1127-1248. (1971)

[23] Veletsos A.S., Verbic B. *Vibration of viscoelastic foundations*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics – ASCE, Vol. 2, pp. 87-102. (1973)

- [24] Domínguez J. *Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations*. Research Report R78-20. Dept. Civ. Engineering Massachusetts Ins. Of Tech. Cambridge, Mass. (1978 a)
- [25] Domínguez J. Response of Embedded Foundations to Travelling Waves. Research Report R78-24- Dept. Civ. Engineering Massachusetts Ins. Of Tech. Cambridge, Mass. (1978 a)
- [26] Karabalis, D.L, Spyrakos, C.C. and Beskos D.E. *Dynamic response of Surface foundations by Time Domain BEM*. Int. Symposium on Dynamic Soil-Structure Int. Minneapolis. Balkema, Rotterdam. (1984)
- [27] Gomez-Lera , S. , Domínguez, J. and Alarcón E. *On the use of 3-D fundamental solutions for axisymmetric steady-state dynamic problems*. Proc. Of the 7th international conference on BEM in engineering. Ed. C.A. Brebbia, 1985.
- [28] Emperador, J. M. and Domínguez J. *Dynamic response of axisymmetric embedded foundations*. Earthquake Engineering Structural Dynamics. Vol, 18, Issue 8. 1105-117. (1989)
- [29] Biot, M.A. *Theory of Propagation of Elastic Wave in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range*. Journal of the Acoustical Society of America, 28, 168-178. (1956)
- [30] Halpern, M., Christiano, P.: *Response of poroelastic halfspace to steady-state harmonic surface tractions*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics **10**, 609–632 (1986).
- [31] Halpern, M. R., Christiano, P.: *Steady-state harmonic response of a rigid plate bearing on a liquid-saturated poroelastic halfspace*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics **14**, 439–454 (1986).
- [32] Chopra, M.B and Dargush, G.F. *Boundary Element Analysis of Stresses in an axisymmetric soil mass undergoing consolidation*. Int. Journal Solids Structures. (1995)
- [33] Bougacha,S., Roesset,J.M. and Tassoulas,J.L. *Analysis of foundations on fluid filled poroelastic stratum*. J.Eng.Mech.ASCE 119:8,1632-1648 (1993).
- [34] Bougacha,S.,Roesset,J.M. and Tassoulas,J.L. *Dynamic stiffness of foundations on fluid filled poroelastic stratum*. J.Eng.Mech.ASCE 119:8,1649-1662. (1993).
- [35] KRYLOV, V.V., *Low-frequency ground vibrations from underground trains*. Journal of Low Frequency Noise and Vibration, 14 (1), pp. 55 – 60 (1995.)
- [36] Galvín, P. and Domínguez, J. *Analysis of ground motion due to moving Surface loads induced by high-speed trains*. Engineering analysis with boundary elements. Vol. 31. Nº 11. 931-941. Elsevier (2007)

- [37] Galvín, P., Romero, A. and Domínguez, J. *Fully three-dimensional analysis of high-speed train-soil-structure dynamic interaction*. Journal of Sound and Vibration. Vol 329. N° 24. 5147-5163. Academic Press (2010)
- [38] Galvín, P. and Romero, A. *A MATLAB toolbox for soil-structure interaction analysis with finite and boundary elements*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering. Vol. 57. 10-14. (2014)
- [39] S. François, M. Schevenels, P. Galvín, G. Lombaert, G. Degrande, *A 2.5D coupled FE-BE methodology for the dynamic interaction between longitudinally invariant structures and a layered halfspace*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 199 (23-24) (2010) 1536– 1548.
- [40] Medina, F. and Domínguez, J. *Boundary elements for the analysis of dams including dam-water-foundation interaction effects*. I. Eng. Analysis with B.E. 6: 151-157 (1989)
- [41] Medina, F., Domínguez, J. and Tassoulas J. L. *Response of dams to earthquakes including effects of sediments*. Journal of Structural Engineering. Vol. 116 Issue 11 (1990)
- [42] Kausel, E and Tassoulas, J.L *Transmitting boundaries: a closed-form comparison*. Bulletin of Seismological Society of America. Vol. 71. (1981)
- [43] Waas, G. *Linear two-dimensional analysis of soil dynamic problems in semi-infinite layer media*. Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley (1972)
- [44] Kausel, E. *Forced vibrations of circular foundations on layered media*. MIT Research Report R74-11. Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge , MA, 02139 (1974)
- [45] Berenger, J.P *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*. Journal of Computational Physics. Vol. 114, Issue 2. Pg. 185-200. (1994)
- [46] Ungless, R. F. *An infinite finite element*. Thesis. University of British Columbia. (1973)
- [47] J..A. Jiménez Salas ; J.L. de Justo Alpañez y A.A. Serrano González. *Geotecnia y cimientos I, II y III*.
- [48] Terzaghi, K., Peck, B. R. and Mesri, G. *Soil Mechanics in Engineering Practice*. (1996)
- [49] Ministerio de Fomento. *Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de ferrocarril (IAPF-07)*. Ministerio de Fomento. (2007).
- [50] Lombaert, G., Degrande, G. , Kogut, J. and François, S. *The experimental validation of a numerical model for the prediction of railway induced vibrations*. Journal of Sound and Vibration (2006)
- [50] H. Xia, H.L. Li, W.W. Guo and G. De Roeck. *Vibration resonance and cancellation of simply supported bridges*

under moving train loads. Journal of Engineering Mechanics. ASCE. (2014)

[51] Museros Romero , P. Moliner, E. and Martinez-Rodrigo, M. *Free vibrations of simply-supported beams bridges under moving loads: maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration*. Journal of sound and vibration. 326-345 (2012)

[52] Ramírez Martínez, J. Ángel. *Condiciones de resonancia y cancelación en puentes de ferrocarril considerando la interacción suelo-estructura: estudio del efecto de las propiedades de la vía*. TFG. Universidad de Sevilla. Ingeniería Civil. (2016)

ANEXO. CÓDIGOS EMPLEADOS.

CÓDIGO 1. Código de MATLAB empleado para resolver problema unidimensional mediante formulación PML.

```
%-----
clear all
clc
%-----
%Parámetros
L=; %longitud dominio elástico-> medio sin PML [m]
L_p=;
n_elast=; %numero de elementos en el medio elast
n_pml=; %numero de elementos en PML
n_el=n_elast+n_pml; %numero de elementos totales
%amortiguamiento proporcional Rayleigh
w1=; %Hz
w2=; %frec que definen el rango del análisis armónico
ratio=0; %razón de amortiguamiento material
r=[ratio;ratio];
A=0.5*[1/(w1*2*pi) w1*2*pi;1/(w2*2*pi) w2*2*pi];
coef=A\r;
alpha=coef(1); %coef alpha y beta de Rayleigh
beta=coef(2);
%-----
nodof_pml=n_el+1; %numero del nodo final
nodof_elast=n_elast+1;
%vector de nodos correspondientes a cada elemento por fila
nodos_el=zeros(nodof_pml-1,2);
k=1;
for n=1:nodof_pml-1
nodos_el(k,:)=[k,k+1];
k=k+1;
end
tam_el=L/n_elast; %tamaño del elemento habitual
tam_pml=L_p/n_pml; %tamaño del elemento pml
coord_n=zeros(nodof_pml,1);
for k=1:nodof_pml
    if k<= nodof_elast
        coord_n(k,:)=(k-1)*tam_el; %coord x de cada nodo (sistema global)
    elseif k > nodof_elast
        coord_n(k,:)=L+(k-nodof_elast)*tam_pml;
    end
end
```

```

end
GDL_n=1; %GDL de cada nodo (elemento unidimensional 1 gdl axil)
%MAT Y GEO
E=; %[Pa]
dens=; %[N/m3]
A=; %[m2]
%-----
%INICIALIZ MATRICES
N=nodof_pml; %numero de nodos del modelo
U=zeros(GDL_n*N,1); %vector columna desplazamientos nodales
F=zeros(GDL_n*N,1); %vector columna fuerzas nodales
K=zeros(GDL_n*N,GDL_n*N); %matriz de rigidez global: emsambladas las elementales
M=zeros(GDL_n*N,GDL_n*N); %matrixz de masa global: emsambladas las elementales
%-----
GDL_restr=nodof_pml; %gdl preescrito u=0 en el extremo
GDL_tot=1:(GDL_n*N); %vector que guarda todos los GDL del modelo
GDL_lib=setdiff(GDL_tot,GDL_restr); %vector que extrae a los GDL totales los restr=
    libres
%-----
%Parámetros del PML
m=; %coef para el grado de la función de atenuación, f
fo=10; %coef para la función de atenuación, f
c1=sqrt(E/dens); %velocidad de prop de onda longitudinal
k_g=; %rigidez de la base donde apoya la barra del problema
ro=sqrt(E*A/k_g); %longitud caract
%RANGO DE FRECUENCIA
omega_o=w1;
omega_f=w2; %[Hz]
%matrices de acumulación
K_freq=[];
M_freq=[];
K_freqlib=[];
M_freqlib=[];
k=1; %índice de pos columna
l=1;
Nm=N*GDL_n; %num de gdl totales del modelo
Nl=Nm-1; %num de gdl libres en el modelo
%-----
%Cálculo de las matrices de masa y rigidez para cada una de las frecuencias. (formulación
    PML)
for omega=omega_o:omega_f
    ao=(omega*ro/c1)*2*pi;
%Ensamblaje de la matriz de rigidez,K
for e=1:size(nodos_el,1)

```

```

DOF_el=nodos_el(e,:);
coord_n_el=[coord_n(DOF_el(1)),coord_n(DOF_el(2))]; %vector que guarda coordenadas de
nodos del elem (e)
%actualizo matriz K con submatriz elemental
K(DOF_el,DOF_el)=K(DOF_el,DOF_el)+IntK(DOF_el,coord_n_el,L,m,fo,L_p,ao,k_g,E,A);
%llama funcion IntK que devuelve submatriz k_ij
end
%Ensamblaje de la matriz de masa,M
for e=1:size(nodos_el,1)
    DOF_el=nodos_el(e,:);
    coord_n_el=[coord_n(DOF_el(1)),coord_n(DOF_el(2))]; %vector que guarda coordenadas de
nodos del elem (e)
%actualizo matriz K con submatriz elemental
M(DOF_el,DOF_el)=M(DOF_el,DOF_el)+IntM(DOF_el,coord_n_el,L,m,fo,L_p,ao,k_g,E,A,dens);
%llama funcion IntK que devuelve submatriz k_ij
end
%act matrices
K_freq(1:Nm,k:(k+Nm-1))=K;
M_freq(1:Nm,k:(k+Nm-1))=M;
%ultimo nodo empotrado
%dejo sistema en GDL libres: quito filas y columnas correspond a GDL restr
K_freqlib(1:Nl,1:(1+Nl-1))=K_freq(1:Nm-1,k:(k+Nm-2));
M_freqlib(1:Nl,1:(1+Nl-1))=M_freq(1:Nm-1,k:(k+Nm-2));
%a cero las matrices
K=zeros(Nm,Nm);
M=zeros(Nm,Nm);
%act
k=k+Nm;
l=1+Nl;
end

% Problema A.K. Chopra: desplaz forzado en extremo libre
U_d=[]; %matriz cuyas colum seran u_d para cada freq
u_c=1;
l=1;
M_i=[];
K_i=[];
S_ii=[];
S=[];
Sw=zeros(1,omega_f); %vector para guardar la componente de rig din del nodo extremo
libre
for w=omega_o:omega_f
    %evaluo matriz de rigidez dinámica para cada frecuencia
    %S(w)=[-w2M-iwC+K]
    %C=0

```

```

M_i=M_freqlib(1:Nl,1:(1+Nl-1));
K_i=K_freqlib(1:Nl,1:(1+Nl-1));
%evaluacion de la rig din
S_ii(1:Nl,1:(1+Nl-1))=(((- (w*2*pi)^2) .*M_i)+K_i+1i*w*(alpha*M_i+beta*K_i));
S=(((- (w*2*pi)^2) .*M_i)+K_i+1i*w*(alpha*M_i+beta*K_i));
%Resolv ecc
U_d(:,w)=-(inv(S(2:size(S,1),2:size(S,2)))*S(2:size(S,1),1))*u_c;
l=1+Nl;
Sw(w)=S(1,2:size(S,2))*U_d(:,w)+S(1,1)*u_c;
end
U_d_comp=zeros(size(U_d,1)+2,size(U_d,2));
U_d_comp(1,:)=ones(1,size(U_d_comp,2));
U_d_comp(size(U_d_comp,1),:)=zeros(1,size(U_d_comp,2));
U_d_comp(2:size(U_d_comp,1)-1,:)=U_d;

%PLOT RESULTS
%Rigidez dinámica evaluada en el extremo libre
hold on
freq=1:40;
a_o=freq.*2.*pi.*ro./c1;
Steorica=sqrt(1-a_o.^2);
% plot(a_o,real(Sw)./Sw(1))
% hold on
% plot(a_o,real(Steorica))
%figure
v=imag(Sw)./a_o;
plot(a_o,imag(Steorica)./a_o)
hold on
plot(a_o,imag(Sw)./a_o./(v(length(v))))

%ONDAS A LO LARGO DE LA BARRA PARA DIF FREQ
figure
hold on
plot(coord_n,U_d_comp(:,7))
plot(coord_n,U_d_comp(:,11))
plot(coord_n,U_d_comp(:,15))
plot(coord_n,U_d_comp(:,20))
plot(coord_n,U_d_comp(:,25))
plot(coord_n,U_d_comp(:,35))
%Funcion IntK: genera la submatriz de rigidez elemental usando Integracion
%Gauss_Legendre
%-----
function [k_ij]=IntK(DOF_el,coord_n_el,L,m,fo,Lp,ao,k_g,E,A)
%Puntos de Integracion y Pesos Gauss

```

```

xi_1=0.5773502692;
xi_2=-0.5773502692;
W1=1;
W2=1;
%calculo de la coordenada central
xc=((coord_n_el(1)+coord_n_el(2))/2);
Le=(coord_n_el(2)-coord_n_el(1)); %longitud del elemento
%-----
B=[(-1/Le),(1/Le)]; %vector que contiene deriv de funciones d forma empleadas
% en coord natural
N1=@(xi) (0.5*(1-xi));
N2=@(xi) (0.5*(1+xi));
N=@(xi) [N1(xi),N2(xi)]; %vector que contiene las funciones de forma en la coord natural
%-----
%antes de iniciar la integracion de k_ij, debemos definir el valor de la
%funcion lambda del PML
%-----
if coord_n_el(1)<L %distinción entre medio elástico-medio PML para el elemento
    lambda=@(xi) (1);
elseif coord_n_el(1)>=L
    if ao>1
        f=@(xi) (fo*((Le*0.5*xi)+xc-L)/Lp)^m);
        lambda=@(xi) (1-(sqrt(-1)*f(xi)/sqrt((ao^2)-1)));
    elseif ao<1
        f=@(xi) (fo*((Le*0.5*xi)+xc-L)/Lp)^m);
        lambda=@(xi) (1+f(xi)/sqrt(1-(ao^2)));
    end
end
%submatriz k_ij
k_ij=zeros(2,2);
for i=1:2
    for j=1:2
        %Gauss_k=[];
        N_k=N(xi_1);

        F1=@(xi) (((B(i)*(E*A)/lambda(xi))*B(j))+((N_k(i)*lambda(xi)*k_g*N_k(j))))*(Le/2));
        %el integrando
        %Gauss_k=Gauss_k+F1(xi_1)*W1;
        N_l=N(xi_2);

        F2=@(xi) (((B(i)*(E*A)/lambda(xi))*B(j))+((N_l(i)*lambda(xi)*k_g*N_l(j))))*(Le/2));
        %Gauss_k=Gauss_k+F2(xi_2)*W2;
        k_ij(i,j)=k_ij(i,j)+(F1(xi_1)*W1+F2(xi_2)*W2);
    end
end

```

end

end

```

    %Funcion IntM: genera la submatriz de masa elemental usando Integracion
    %Gauss_Legendre
    %-----
    function [m_ij]=IntM(DOF_el,coord_n_el,L,m,fo,Lp,ao,k_g,E,A,dens)
    %Puntos de Integracion y Pesos Gauss
    xi_1=0.5773502692;
    xi_2=-0.5773502692;
    W1=1;
    W2=1;
    %calculo de la coordenada central
    xc=((coord_n_el(1)+coord_n_el(2))/2);
    Le=(coord_n_el(2)-coord_n_el(1)); %longitud del elemento
    %-----
    B=[(-1/Le),(1/Le)]; %vector que contiene deriv de funciones d forma empleadas
    % en coord natural
    N1=@(xi) (0.5*(1-xi));
    N2=@(xi) (0.5*(1+xi));
    N=@(xi) [N1(xi),N2(xi)]; %funciones de forma en la coord natural
    %-----
    %antes de iniciar la integracion de m_ij, debemos definir el valor de la
    %funcion lambda del PML
    %-----
    if coord_n_el(1)<L
        lambda=@(xi) (1);
    elseif coord_n_el(1)>=L
        if ao>1
            f=@(xi) (fo*((Le*0.5*xi)+xc-L)/Lp)^m);
            lambda=@(xi) (1-(sqrt(-1)*f(xi)/sqrt((ao^2)-1)));
        elseif ao<1
            f=@(xi) (fo*((Le*0.5*xi)+xc-L)/Lp)^m);
            lambda=@(xi) (1+f(xi)/sqrt(1-(ao^2)));
        end
    end
    %submatriz k_ij
    m_ij=zeros(2,2);
    for i=1:2
        for j=1:2
            %Gauss_k=[];
            N_k=N(xi_1);
            F1=@(xi) (dens*A*lambda(xi)*N_k(i)*N_k(j)*(Le/2)); %el integrando
            %Gauss_k=Gauss_k+F1(xi_1)*W1;

```

```

N_l=N(xi_2);
F2=@(xi) (dens*A*lambda(xi)*N_l(i)*N_l(j)*(Le/2));
%Gauss_k=Gauss_k+F2(xi_2)*W2;
m_ij(i,j)=m_ij(i,j)+(F1(xi_1)*W1+F2(xi_2)*W2);
end
end
end

```

CÓDIGO 2. Código de MATLAB empleado para generar las ecuaciones de ligadura en APDL.

```

clear
clc
close all
%-----
NODOS=[]';
%listado de nodos a aplicar ecuaciones de ligadura; se puede usar orden load y cargar
listado de ANSYS.
n=size(NODOS,1);
cont=1;
master=NODOS(:,1); %nodo master para las ecuaciones
n_acop=[];
for nodo=1:n
    if nodo~= (.)
        n_acop(cont,1)=master;
        n_acop(cont,2)=NODOS(nodo,1);

        end
        cont=cont+1;
end
nceq=size(n_acop,1);
%
fid = fopen('nombre_del_archivo.log','w');
% se crea un archivo de texto en la carpeta de trabajo donde se escriben las ecuaciones
j=0;
for ieq=1:nceq
    fprintf(fid,'CE,%d,0,%d,UX,1,%d,UX,-1,\n',ieq+j,n_acop(ieq,1),n_acop(ieq,2));
    fprintf(fid,'CE,%d,0,%d,UY,1,%d,UY,-1,\n',(ieq+1)+j,n_acop(ieq,1),n_acop(ieq,2));
    fprintf(fid,'CE,%d,0,%d,UZ,1,%d,UZ,-1,\n',(ieq+2)+j,n_acop(ieq,1),n_acop(ieq,2));
    j=j+2;
end
%en este caso se generan ecuaciones que ligan todos los GDL (3 en el caso del elemento
%empleado) de la lista de nodos con los GDL del nodo maestro (centro de la cimentación)

```

CÓDIGO 3. Código de ANSYS APDL para generar el modelo de zapata sin elementos PML. (Empleado para obtener la compliancia vertical)

```

/clear
/PREP7
!Geometría
!-----
a= !lado del cubo de suelo modelizado
b= !espesor de la capa PML
C= !lado zapata
F= !lado zapata
D= !tamaño del elemento
!-----
!Elementos
!-----
ET,3,SOLID185
!-----

```



```
!Propiedades del suelo
E= !Módulo de Young
Cs= !velocidad de ondas de corte
dens= !densidad
G=(Cs^2)*dens !Módulo de corte del suelo
pois= !coeficiente de Poisson
MP,EX,2,E
MP,EY,2,E
MP,EZ,2,E
MP,NUXY,2,pois
MP,NUYZ,2,pois
MP,NUXZ,2,pois
MP,GXY,2,G
MP,GYZ,2,G
MP,GXZ,2,G
MP,DENS,2,dens
!-----
!Generación geometría
BLC5,0,0,a,a,-a*0.5
BLC5,(a/2)+(b/2),0,b,a,-a*0.5
BLC5,-((a/2)+(b/2)),0,-b,a,-a*0.5
WPLANE,,0,0,-a*0.5,a/2,0,-a*0.5,a/2,a*0.5,-a*0.5
BLC5,0,0,a,a,-b
BLC5,(a/2+b/2),0,b,a,-b
BLC5,-(a/2+b/2),0,-b,a,-b
WPLANE,,0,0,0,a/2,0,0,a/2,a,0
BLC5,0,(a/2+b/2),a+b*2,b,-(a*0.5+b)
BLC5,0,-(a/2+b/2),a+b*2,-b,-(a*0.5+b)
!-----
!Mallado
VSEL,S,VOLU,,1
ESIZE,D
TYPE,3
MAT,2
VMESH,ALL
ALLSEL
VSEL,S,VOLU,,2
VSEL,A,VOLU,,3
VSEL,A,VOLU,,4
VSEL,A,VOLU,,5
VSEL,A,VOLU,,6
VSEL,A,VOLU,,7
VSEL,A,VOLU,,8
ESIZE,D
TYPE,3
MAT,2
VMESH,ALL
ALLSEL
!-----
!Seleccionamos los nodos en el area de contacto zapata-suelo para
!aplicarle las ecuaciones de ligadura
NSEL,S,LOC,Z,0
NSEL,R,LOC,X,-2,2
NSEL,R,LOC,Y,-2,2
!----
!Se generan las ecuaciones de ligadura en MATLAB, se copia
el archivo generado

allsel,all
nummrg,all,,,low

!CONDICIONES DE CONTORNO: se imponen restricciones de desplazamiento en los
!contornos del modelo (en los nodos)
NSEL,S,LOC,X,(a/2)+b
NSEL,A,LOC,X,-(a/2)-b
NSEL,A,LOC,Y,(a/2)+b
NSEL,A,LOC,Y,-(a/2)-b
NSEL,A,LOC,Z,-(a*0.5+b)
D,ALL,ALL,0
```

```
allsel,all
```

```
FINISH
```

CÓDIGO 4. Código de ANSYS APDL para generar el modelo de zapata con elementos PML. (Empleado para obtener la compliancia vertical)

```
/clear
/PREP7
!Geometría
!-----
a=
b=
C=
F=
H=
D=!-----
ET,3,SOLID185
ET,4,SOLID185
KEYO,4,15,1 !incluir PML en el elemento SOLID185
!-----
!Propiedades del suelo
E= !Módulo de Young
Cs= !velocidad de ondas de corte
dens= !densidad
G=(Cs^2)*dens !Módulo de corte del suelo
pois= !coeficiente de Poisson
MP,EX,2,E
MP,EY,2,E
MP,EZ,2,E
MP,NUXY,2,pois
MP,NUYZ,2,pois
MP,NUXZ,2,pois
MP,GXY,2,G
MP,GYZ,2,G
MP,GXZ,2,G
MP,DENS,2,dens
!-----
!generación de geometría
!-----
BLC5,0,0,a,a,-a*0.5
BLC5,(a/2)+(b/2),0,b,a,-a*0.5
BLC5,-((a/2)+(b/2)),0,-b,a,-a*0.5
WPLANE,,0,0,-a*0.5,a/2,0,-a*0.5,a/2,a*0.5,-a*0.5
BLC5,0,0,a,a,-b
BLC5,(a/2+b/2),0,b,a,-b
BLC5,-(a/2+b/2),0,-b,a,-b
wplane,,0,0,0,a/2,0,0,a/2,a,0
BLC5,0,(a/2+b/2),a+b*2,b,-(a*0.5+b)
BLC5,0,-(a/2+b/2),a+b*2,-b,-(a*0.5+b)

!mallado de los volúmenes sin elementos PML
VSEL,S,VOLU,,1
ESIZE,D
TYPE,3
MAT,2
VMESH,ALL
ALLSEL
!mallado de la capa PML
VSEL,S,VOLU,,2
VSEL,A,VOLU,,3
VSEL,A,VOLU,,4
```

```
VSEL,A,VOLU,,5
VSEL,A,VOLU,,6
VSEL,A,VOLU,,7
VSEL,A,VOLU,,8
ESIZE,D
TYPE,4
MAT,2
VMESH,ALL
ALLSEL
!-----
!Seleccionamos los nodos en el area de contacto zapata-suelo para
!aplicarle las ecuaciones de ligadura
NSEL,S,LOC,Z,0
NSEL,R,LOC,X,-2,2
NSEL,R,LOC,Y,-2,2
!----
!Se generan las ecuaciones de ligadura en MATLAB, se copia
el archivo generado

allsel,all
nummrg,all,,,low

!CONDICIONES DE CONTORNO: se imponen restricciones de desplazamiento en las 5 caras del
cubo PML
! en los nodos externos a los elementos PML
NSEL,S,LOC,X,(a/2)+b
NSEL,A,LOC,X,-(a/2)-b
NSEL,A,LOC,Y,(a/2)+b
NSEL,A,LOC,Y,-(a/2)-b
NSEL,A,LOC,Z,-(a*0.5+b)
D,ALL,ALL,0

allsel,all
```

CÓDIGO 5. Código de ANSYS APDL para generar el modelo de zapata con elementos PML. (Empleado para obtener la compliancia al giro)

```
/clear
/PREP7
!Geometría
!-----
a=
b=
C=
F=
D= !tamaño del elemento
!-----
ET,3,SOLID185
ET,4,SOLID185
ET,5,SHELL181
KEYO,4,15,1 !INLUIR PML EN EL ELEMENTO SOLID185
!propiedades de la región tipo placa
SECT,1,SHELL,,
SECDATA,0.4,1,0.0,3
SECOFFSET,MID
SECCONTROL,,,,,,,,
!-----
!Material muy rígido para la zona
!tipo placa
E=
pois=
MP,EX,1,E
MP,EY,1,E
MP,EZ,1,E
MP,NUXY,1,pois
MP,NUYZ,1,pois
MP,NUXZ,1,pois
```

```

MP,DENS,1,0 !importante:densidad nula al material para
!zona tipo placa
!-----
!Propiedades del suelo
!-----
Es= !Módulo de Young
Cs= !velocidad de ondas de corte
dens= !densidad
G=(Cs^2)*dens !Módulo de corte del suelo
pois2= !coeficiente de Poisson
MP,EX,2,Es
MP,EY,2,Es
MP,EZ,2,Es
MP,NUXY,2,pois2
MP,NUYZ,2,pois2
MP,NUXZ,2,pois2
MP,GXY,2,G
MP,GYZ,2,G
MP,GXZ,2,G
MP,DENS,2,dens
!generación de la geometría
BLC5,0,0,a,a,-a*0.5
BLC5,(a/2)+(b/2),0,b,a,-a*0.5
BLC5,-((a/2)+(b/2)),0,-b,a,-a*0.5
WPLANE,,0,0,-a*0.5,a/2,0,-a*0.5,a/2,a*0.5,-a*0.5
BLC5,0,0,a,a,-b
BLC5,(a/2+b/2),0,b,a,-b
BLC5,-(a/2+b/2),0,-b,a,-b
wplane,,0,0,0,a/2,0,0,a/2,a,0
BLC5,0,(a/2+b/2),a+b*2,b,-(a*0.5+b)
BLC5,0,-(a/2+b/2),a+b*2,-b,-(a*0.5+b)
!REGION RIGIDA TIPO PLACA
K,70,C*0.5,-C*0.5,0
K,71,C*0.5,C*0.5,0
K,72,-C*0.5,C*0.5,0
K,73,-C*0.5,-C*0.5,0

L,70,71
L,71,72
L,72,73
L,73,70

A,70,71,72,73
!Mallado de zona de suelo sin elementos PML
VSEL,S,VOLU,,1
ESIZE,D
TYPE,3
MAT,2
VMESH,ALL
ALLSEL

!Mallado de la capa PML
VSEL,S,VOLU,,2
VSEL,A,VOLU,,3
VSEL,A,VOLU,,4
VSEL,A,VOLU,,5
VSEL,A,VOLU,,6
VSEL,A,VOLU,,7
VSEL,A,VOLU,,8
ESIZE,D
TYPE,4
MAT,2
VMESH,ALL
ALLSEL

NUMMRG,ALL

!mallado de zona tipo placa
LSEL,S,LINE,,97

```

```
LSEL,A,LINE,,98
LSEL,A,LINE,,99
LSEL,A,LINE,,100
LESIZE,ALL,D,,
LSEL,ALL

ALLSEL,ALL
AATT,1,1,5,0,1
AMESH,49
!acoplamiento de los GDL de los nodos
!de elemento placa y elemento 3d en misma
!posición
CPINTF,UX,0.001
CPINTF,UY,0.001
CPINTF,UZ,0.001

!CONDICIONES DE CONTORNO: se imponen restricciones de desplazamiento en las 5 caras del
cubo PML
! en los nodos externos a los elementos PML
NSEL,S,LOC,X,(a/2)+b
NSEL,A,LOC,X,-(a/2)-b
NSEL,A,LOC,Y,(a/2)+b
NSEL,A,LOC,Y,-(a/2)-b
NSEL,A,LOC,Z,-(a*0.5+b)
D,ALL,ALL,0

allsel,all
```

CÓDIGO 6. Código de ANSYS APDL para realizar el análisis armónico.

De forma general, se particulariza para el caso de impedancia vertical (carga vertical) o impedancia al giro (momento aplicado)

```
FINISH
/SOL
ANTYPE,3 !tipo de análisis
!-----
HROPT,FULL !tipo de solución del análisis armónico
HROUT, !formato en que se obtiene la solución, bien en parte
!compleja e imaginaria, o bien en amplitud y fase
LUMPM,0 !usar matriz de masa congruente no diagonal
!-----
EQSLV,,0, !método de solución de las ecuaciones (tomará por
!defecto el sparse solver, dado que es más eficiente) Se especifica !tolerancia para el
proceso iterativo
PSTRES,0
!-----
omega1=
omega2=
nsbtep=
HARFRQ,omega1,omega2 ;rango de frecuencia en el análisis
NSUBST,nsbtep, !subpasos dentro del caso de carga
KBC,1 !usar mismo valor de la carga en cada subpaso
!-----
/SOLVE
```

CÓDIGO 7. Código de ANSYS APDL para generar el modelo de puente viga sin elementos infinitos.

```

/PREP7
!*****
!GEOMETRÍA ESTRIBOS Y EINFIN
!*****
!PARAMETROS GEOMETRICOS
a=      !LADO SUELO EN X
a2=     !LADO SUELO EN Y
prof=   !PROFUNDIDAD SUELO
B=      !DIM BASE ESTRIBO LADO EN X
C=      !DIM BASE ESTRIBO LADO EN Y
H=      !CANTO DE BASE ESTRIBO
D=      !TAMAÑO DE MALLADO
m=      !EXCENTRICIDAD PARED ESTRIBO RESPECTO CDG BASE
e=      !ESPESOR PARED ESTRIBO
alt=    !ALTURA DEL ESTRIBO
esc=    !ESCALÓN
L=      !LUZ PUENTE VIGA
!*****
!ELEMENTOS Y MATERIALES
!*****
ET,1,BEAM188 !PARA TABLERO
!-----
ET,2,SOLID185 !PARA SUELO Y ESTRIBOS
!-----
!-----
EH=      !MOD YOUNG HORMIGÓN
POISH=   !COEF POISSON HORMIGÓN
DENSH=   !DENSIDAD HORMIGÓN
EA=      !MOD YOUNG ACERO
POISA=   !COEF POISSON ACERO
DENSA=   !DENSIDAD ACERO
CS=      !VELOCIDAD DE ONDAS DE CORTE EN EL SUELO
DENSS=   !DENSIDAD SUELO
GS=DENSS*CS^2 !MOD CORTE SUELO
POISS=   !COEF POISSON SUE
ES=2*(1+POISS)*GS !MOD ELAST LONG SUELO
DAMPS=   !AMORTIGUAMIENTO DEL SUELO
!HORMIGON
!-----
MP,EX,1,EH
MP,EY,1,EH
MP,EZ,1,EH
MP,NUXY,1,POISH
MP,NUYZ,1,POISH
MP,NUXZ,1,POISH
MP,DENS,1,DENSH
!ACERO
!-----
MP,EX,3,EA
MP,EY,3,EA
MP,EZ,3,EA
MP,NUXY,3,POISA
MP,NUYZ,3,POISA
MP,NUXZ,3,POISA
MP,DENS,3,DENSA
!-----SUELO
MP,EX,2,ES
MP,EY,2,ES
MP,EZ,2,ES
MP,NUXY,2,POISS
MP,NUYZ,2,POISS
MP,NUXZ,2,POISS
MP,GXY,2,GS
MP,GYZ,2,GS
MP,GXZ,2,GS
MP,DENS,2,DENSS
MP,DMPR,2,DAMPS
!*****
!*****
!GENERACIÓN ESTRIBO 1
!*****
!*****
BLC5,0,-m,B,C,-H

```

```

BLC5, (B/2)+(1/4)*(a1-B),-m, (a1-B)/2,a2,-H
BLC5,-((B/2)+(1/4)*(a1-B)), -m,-(a1-B)/2,a2,-H
BLC5,0,((C/2)+(1/4)*(a2-C))-m,B,((a2/2)-(C/2)), -H
BLC5,0,-((C/2)+(1/4)*(a2-C))-m,B,-((a2/2)-(C/2)), -H
WPLANE,,0,0,-H,a/2,0,-H,a/2,a,-H
BLC5,0,-m,a1,a2,-(prof)
wplane,,0,0,0,a/2,0,0,a/2,a,0
BLC5,0,0,B,e,alt
BLC5,0,-e,B,e,alt-esc
BLC5,(B/2+((a1-B)/4)),(a2/4+m/2-e/4)-m,(B-a1)/2,(a2/2-m+e/2),alt
BLC5,-(B/2+((a1-B)/4)),(a2/4+m/2-e/4)-m,-(B-a1)/2,(a2/2-m+e/2),alt
BLC5,0,(m/2+e/4+a2/4)-m,(B),(a2/2-m-e/2),alt
!-----
!*****
!MALLADO DE VOLUMENES ESTRIBO 1
!*****
VSEL,S,VOLU,,1 !mallado del estribo
VSEL,A,VOLU,,7
VSEL,A,VOLU,,8
ESIZE,D
TYPE,2
MAT,1
VMESH,ALL
ALLSEL
VSEL,S,VOLU,,2 !mallado del suelo que lo rodea
VSEL,A,VOLU,,3
VSEL,A,VOLU,,4
VSEL,A,VOLU,,5
VSEL,A,VOLU,,6
VSEL,A,VOLU,,9
VSEL,A,VOLU,,10
VSEL,A,VOLU,,11
ESIZE,D
TYPE,2
MAT,2
VMESH,ALL
ALLSEL
!*****
!*****
!GENERACIÓN ESTRIBO 2
!*****
!*****
WPLANE,,0,-L,0,a1,-L,-0,a2,-L+1,0
BLC5,0,-1*(-m),B,C,-H
BLC5,(B/2)+(1/4)*(a1-B),-1*(-m),(a1-B)/2,a2,-H
BLC5,-((B/2)+(1/4)*(a1-B)), -1*(-m),-(a1-B)/2,a2,-H
BLC5,0,-1*((C/2)+(1/4)*(a2-C))-m,B,((a2/2)-(C/2)), -H
BLC5,0,-1*(-((C/2)+(1/4)*(a2-C))-m),B,-((a2/2)-(C/2)), -H
WPLANE,,0,-L,-H,a1,-L,-H,a2,-L+1,-H
BLC5,0,-1*(-m),a1,a2,-(prof)
WPLANE,,0,-L,0,a1,-L,-0,a2,-L+1,0
BLC5,0,0,B,e,alt
BLC5,0,e,B,e,alt-esc
BLC5,(B/2+((a1-B)/4)), -1*((a2/4+m/2-e/4)-m),(B-a1)/2,(a2/2-m+e/2),alt
BLC5,-(B/2+((a1-B)/4)), -1*((a2/4+m/2-e/4)-m),-(B-a1)/2,(a2/2-m+e/2),alt
BLC5,0,-1*((m/2+e/4+a2/4)-m),(B),(a2/2-m-e/2),alt
!-----
!*****
!MALLADO DE VOLUMENES ESTRIBO 2
!*****
VSEL,S,VOLU,,12 !mallado del estribo
VSEL,A,VOLU,,18
VSEL,A,VOLU,,19
ESIZE,D
TYPE,2
MAT,1
VMESH,ALL
ALLSEL
VSEL,S,VOLU,,13 !mallado del suelo que lo rodea
VSEL,A,VOLU,,14
VSEL,A,VOLU,,15
VSEL,A,VOLU,,16
VSEL,A,VOLU,,17
VSEL,A,VOLU,,20
VSEL,A,VOLU,,21
VSEL,A,VOLU,,22
ESIZE,D
TYPE,2

```

```

MAT,2
VMESH,ALL
ALLSEL
!Suelo entre ambos
WPLANE,,0,0,0,a/2,0,0,a/2,a,0
BLC5,0,-(a2/2+m+(L/2)-(a2/2+m)),a1,(L-(a2/2+m)*2),-(prof+H)
VSEL,S,VOLU,,23
ESIZE,D
TYPE,2
MAT,2
VMESH,ALL
ALLSEL
CPINTF,UX,0.001
CPINTF,UY,0.001
CPINTF,UZ,0.001
!%%%%%%%%%%
!*****
!CONDICIONES DE CONTORNO: impedidos todos GDL en nodos de contorno
!*****
NSEL,S,LOC,X,a1/2
NSEL,A,LOC,X,-a1/2
NSEL,A,LOC,Y,a2/2-m
NSEL,A,LOC,Y,-L+m-a2/2
NSEL,A,LOC,Z,-prof-H
D,ALL,ALL,0
allsel,all
!*****
!GENERACIÓN DEL PUENTE VIGA
!*****
long=L
!-----
!Seccion del puente viga: losa horm+perf metálico
!losa
ancho=
esp= !espesor de losa horm
!perfil met (datos geom s/sectype beam, subtype hats)
W1=
W2=
W3=
W4=
T1=
T2=
T4=
T5=
T3=
!-----
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET,USER,0,esp/2
SECDATA,ancho,esp
SECTYPE,2,BEAM,HATS,,0
SECOFFSET,USER,W1+(W3-2*T4)/2,-esp
SECDATA,W1,W2,W3,W4,T1,T2,T3,T4,T5
!-----
! Geometria LONGITUDINAL
apoyo= !espesor apoyo
elev=W4+esp+apoyo !elevacion de la fibra superior del tablero sobre estribo
K,2000003,0,-(L+D/2)+e,(alt-esc)+elev
K,1000003,0,(D/2)-e,(alt-esc)+elev
K,2000004,0,-(L+D/2)+e,(alt-esc)+elev
K,1000004,0,(D/2)-e,(alt-esc)+elev
L,1000003,2000003 !Linea a mallar con losa
L,1000004,2000004 !linea a mallar con perfil met
!*****
!MALLADO DE VIGA
!*****
!la discretizacion del tablero depende de la velocidad a la
!que circula la carga: la carga se desplaza del nodo n al nodo n+2.
!PARAMETROS DE CARGA MOVIL:
Q= ! Valor de la carga (N)
dt= ! Paso de tiempo para analisis transitorio (s)
tend= ! Tiempo de integración (s)
PI=ACOS(-1)
!VELOCIDAD DE CIRCULACIÓN DE LA CARGA
vkmh= !Velocidad en km/h
V=vkmh/3.6 !Velocidad en m/s
long=L
tdur=long/V !Tiempo que permanece la carga sobre la viga (vibración forzada)

```



```

!-----
!MALLADO:
!-----
!LOSA:
dx=dt*V/2 !El tamaño del elemento estará relacionado con la velocidad y el paso de tiempo
NDIV=NINT(long/dx)
LSEL,S,LINE,,277
LESIZE,ALL,, ,NDIV, ,1, , ,1,
dx=long/NDIV
TYPE,1
SECNUM,1
MAT,1
LMESH,ALL
!PERFIL MET:
K,1000005,0,(D/2)-e,(alt-esc)+elev-0.5 !KEYP ORIENT
LSEL,S,LINE,,278
LESIZE,ALL,, ,NDIV, ,1, , ,1,
LATT, 3,,1,,1000005,,2
*SET,dx,long/NDIV
LMESH,ALL
!para lograr acción mixta tablero-perfil:
nset,s,loc,z,(alt-esc)+elev
CPINTE,UX,0.001
CPINTE,UY,0.001
CPINTE,UZ,0.001
CPINTE,ROTX,0.001
CPINTE,ROTY,0.001
CPINTE,ROTZ,0.001
ALLSEL,ALL
!-----
!*****
!Condiciones de apoyo tablero-estribos
!Se acoplan los 3 gdl de desplazamiento en uno
!de los estribos, mientras que se deja libre los movimientos
!horizontales en el otro
nest1= !numero del nodo en estribo 1 al cual acoplar
nest2= !idem estr 2
ntabl1= !nodo extremo 1 tablero
ntabl2= !idem extr 2
!----
CE,1,0,nest1,UX,1,ntabl1,UX,-1
CE,2,0,nest1,UY,1,ntabl1,UY,-1
CE,3,0,nest1,UZ,1,ntabl1,UZ,-1
CE,4,0,nest2,UX,1,ntabl2,UX,-1
CE,5,0,nest2,UZ,1,ntabl2,UZ,-1
!-----
ALLSEL,ALL
FINISH

```

CÓDIGO 8. Código de ANSYS APDL para generar el modelo de puente viga con elementos infinitos.

El código es equivalente al anterior con la salvedad de:

- tras la línea donde aparece ¡!!!!!!, se aplica el siguiente código para generar los elementos infinitos.

- No se aplican condiciones de contorno en el modelo.

!NODO POLE: nodo de referencia (xo en teoría) para generación. Se selecciona en el centro del modelo.

```

K,2500,0,-(a2/2+m+(L/2)-(a2/2+m)),0
NKPT,10490,2500
NP=node(0,-(a2/2+m+(L/2)-(a2/2+m)),0)
NSEL,S,LOC,X,a1/2
NSEL,R,LOC,Z,0,-(prof+H)
EINFIN,,NP
NSEL,S,LOC,X,-a1/2
NSEL,R,LOC,Z,0,-(prof+H)
EINFIN,,NP
NSEL,S,LOC,y,(a2/2)-m
NSEL,R,LOC,Z,0,-(prof+H)

```

```

NSEL,U,LOC,X,a1/2+0.1,a1
NSEL,U,LOC,X,-(a1/2+0.1),-a1
EINFIN,,NP
NSEL,S,LOC,Y,-(a2/2)+m-L
NSEL,R,LOC,Z,0,-(prof+H)
NSEL,U,LOC,X,a1/2+0.1,a1
NSEL,U,LOC,X,-(a1/2+0.1),-a1
EINFIN,,NP
NSEL,S,LOC,Z,-(prof+H)
NSEL,U,LOC,X,a1/2+0.1,a1
NSEL,U,LOC,X,-(a1/2+0.1),-a1
NSEL,U,LOC,Y,(a2/2+5),100
NSEL,U,LOC,Y,-(m+L+a2/2),-100
EINFIN,,NP
!Otro nodo de referencia para generar elementos a partir de dos nodos
K,2700,0,-(a2/2+m+(L/2)-(a2/2+m)),alt
NKPT,12462,2700
NP2=node(0,-(a2/2+m+(L/2)-(a2/2+m)),alt)
NSEL,S,LOC,X,a1/2
NSEL,R,LOC,Z,0,alt
NSEL,R,LOC,Y,-e+0.1,a2/2-m
EINFIN,,NP,NP2
NSEL,S,LOC,X,-a1/2
NSEL,R,LOC,Z,0,alt
NSEL,R,LOC,Y,-e+0.1,a2/2-m
EINFIN,,NP,NP2
NSEL,S,LOC,Y,(a2/2-m)
NSEL,R,LOC,Z,0,alt
NSEL,R,LOC,X,-(a1/2),a1/2
EINFIN,,NP,NP2
NSEL,S,LOC,X,a1/2
NSEL,R,LOC,Z,0,alt
NSEL,R,LOC,Y,-L+e-0.1,-a2/2+m-L
EINFIN,,NP,NP2
NSEL,S,LOC,X,-a1/2
NSEL,R,LOC,Z,0,alt
NSEL,R,LOC,Y,e-0.1-L,-a2/2+m-L
EINFIN,,NP,NP2
NSEL,S,LOC,Y,-(a2/2-m)-L
NSEL,R,LOC,Z,0,alt
NSEL,R,LOC,X,-(a1/2),a1/2
EINFIN,,NP,NP2
ALLSEL,ALL

```

CÓDIGO 9. Código de ANSYS APDL para realizar el análisis transitorio. Carga móvil.

```

FINISH
/SOLU
! Análisis Transitorio (tipo Full)
ANTYPE,TRANS
TRNOPT,FULL
OUTRES,ALL,ALL
LUMPM,0 ! matriz de masa congruente (no diagonal)
NSTEP=NINT(tend/dt+1)
DELTIM,dt
!Amortiguamiento de Rayleigh
rdamp= !tasa de amortiguamiento respecto del critico
!frecuencias que delimiten el rango de interés. Se tomará la frecuencia correspondiente
!al primer modo de vibración del tablero, y como frecuencia final 30 Hz.
omega1=
omega2=
w1=2*PI*omega1
w2=2*PI*omega2
ALPHAD,2*rdamp/(w1+w2)*w1*w2 !coeficientes alpha y beta de Rayleigh
BETAD,2*rdamp/(w1+w2)
KBC,0
INIT=1E-10 !instante de tiempo inicial

```

```
ALLSEL
TIME,INIT ! Instante de tiempo inicial (C. inciales)
LSWRITE,1
!*****
! Macro para aplicar la carga móvil al tablero
!*****
*CREATE,FORCE
!ARG1=tiempo correspondiente al paso de tiempo
!ARG2=instante de tiempo inicial
!ARG3=velocidad
!ARG4=tiempo que tarda la carga en cruzar el puente
!ARG5=valor de la carga
!ARG6=numero del caso de carga
!ARG7=tolerancia para discernir el nodo sobre el que esta la carga
To=ARG2 !instante de tiempo inicial
DeltaT=ARG1-To !tiempo que lleva la carga en la viga
*IF,DeltaT,GT,ARG4,THEN !si la carga ha sobrepasado el puente, se borran todas las cargas
FDELETE,ALL
*ELSE
FDELETE,ALL !borramos la carga anterior
POS=DeltaT*ARG3 !posicion de la carga en función de la velocidad
tol=ARG7
NSEL,S,LOC,Y,(-1*POS-tol),-1*POS+tol !Nodo donde se encuentra la carga
NSEL,R,LOC,X,0
NSEL,R,LOC,Z,(alt-esc)+elev
F,ALL,FZ,ARG5 !Se aplica la carga
ALLSEL,ALL
*ENDIF
TIME,ARG1
LSWRITE,ARG6 !se escribe el correspondiente paso de carga
*END
*ULIB,FORCE
TIMINT,OFF !Turns off transient effects
*USE,FORCE,INIT,1
TIMINT,ON !Turns on transient effects
*SET,tol,dx/2 !mitad de la distancia entre nodos
!Se ejecuta la macro en bucle
*DO,K,2,NSTEP+1
*USE,FORCE,INIT+(K-1)*dt,INIT,V,Tdur,Q,K,tol
*ENDDO
! Solve
LSSOLVE,1,NSTEP+1,1, !resolver todos los casos de carga guardados
! POST-PROCESSOR
FINISH
```

CÓDIGO 10. Código de ANSYS APDL para generar el modelo de estructura y vía próxima sin elementos infinitos.

```
/clear
/prep7
!*****
GEOMETRÍA
!*****
!PARÁMETROS:
D= !tamaño elemento suelo
dl= !distancia entre linea de carga y contorno modelo x=0
A= !lado suelo en Y
B= !lado suelo en X
C= !dimension edific X
T= !dimension edific Y
anchov= !ancho de la vía (Placa)
dist= !distancia del edific a la vía
piso= !altura del piso
!-----
```

```

!GENERACIÓN GEOMETRÍA
!-----
!-----
!vía en placa.Área 1.
K,1,d1,0,0
K,2,(d1+anchov),0,0
K,3,(d1+anchov),A,0
K,4,d1,A,0

L,1,2
L,2,3
L,3,4
L,4,1

AL,1,2,3,4

!Losa edific.Área 2.
K,5,(d1+ancho+dist),(A-C)/2,0
K,6,(d1+ancho+dist+T),(A-C)/2,0
K,7,(d1+ancho+dist+T),((A-C)/2)+C,0
K,8,(d1+ancho+dist),((A-C)/2)+C,0

L,5,6
L,6,7
L,7,8
L,8,5

AL,5,6,7,8

!Pisos altura:
!1er piso. Área 3.
K,52,(d1+ancho+dist),(A-C)/2,piso
K,62,(d1+ancho+dist+T),(A-C)/2,piso
K,72,(d1+ancho+dist+T),((A-C)/2)+C,piso
K,82,(d1+ancho+dist),((A-C)/2)+C,piso

L,52,62
L,62,72
L,72,82
L,82,52

AL,9,10,11,12

!2ndo piso. Área 4.
K,53,(d1+ancho+dist),(A-C)/2,piso*2
K,63,(d1+ancho+dist+T),(A-C)/2,piso*2
K,73,(d1+ancho+dist+T),((A-C)/2)+C,piso*2
K,83,(d1+ancho+dist),((A-C)/2)+C,piso*2

L,53,63
L,63,73
L,73,83
L,83,53

AL,13,14,15,16

!3er piso. Área 5.
K,54,(d1+ancho+dist),(A-C)/2,piso*3
K,64,(d1+ancho+dist+T),(A-C)/2,piso*3
K,74,(d1+ancho+dist+T),((A-C)/2)+C,piso*3
K,84,(d1+ancho+dist),((A-C)/2)+C,piso*3

L,54,64
L,64,74
L,74,84
L,84,54

AL,17,18,19,20

```

```

! PILARES:
!-----
L, 5, 52
L, 6, 62
L, 7, 72
L, 8, 82
L, 52, 53
L, 62, 63
L, 72, 73
L, 82, 83
L, 53, 54
L, 63, 64
L, 73, 74
L, 83, 84
!-----
! *****
ELEMENTOS, MATERIALES Y SECCIONES
! *****
!MATERIALES
!-----
EH= !Mod young horm
POISH= !coef Poisson horm
DENSH= !densidad hormigón
CS= !velo ondas de corte
DENSS= !densidad suelo
GS=CS^2*DENSS
POISS=
ES=GS*(1+POISS)*2
DAMPS= !amortiguamiento suelo
!HORMIGÓN
MP,EX,1,EH
MP,EY,1,EH
MP,EZ,1,EH
MP,NUXY,1,POISH
MP,NUYZ,1,POISH
MP,NUXZ,1,POISH
MP,DENS,1,DENSH
!SUELO
MP,EX,2,ES
MP,EY,2,ES
MP,EZ,2,ES
MP,NUXY,2,POISS
MP,NUYZ,2,POISS
MP,NUXZ,2,POISS
MP,GXY,2,GS
MP,GYZ,2,GS
MP,GXZ,2,GS
MP,DENS,2,GS
MP,DMPR,2,DAMPS !AMORTIGUAMIENTO DEL 5% PARA EL SUELO
!-----
!ELEMENTOS
!-----
ET,1,SOLID185
ET,2,SHELL181
ET,3,BEAM188
!-----
!VIA EN PLACA
!-----
espvia=0.25
SECTYPE,1,SHELL
SECDATA,espvia,1
SECOFFSET,BOT
!-----
!LOSA EDIF
!-----
esplosa=0.4
SECTYPE,2,SHELL
SECDATA,esplosa,1
SECOFFSET,BOT

```

```

!-----
!FORJADOS
!-----
forjado=0.3
SECTYPE,3,SHELL
SECDATA,forjado,1
SECOFFSET,MID
!-----
!PILARES EDIF
!-----
ladopilar=0.4
SECTYPE,4,BEAM,RECT
SECDATA,ladopilar,ladopilar
!*****
!MALLADO DE VOLÚMENES,ÁREAS,LÍNEAS
!*****
-----
LSEL,S,LINE,,1,4,1
LESIZE,ALL,D
ASEL,S,AREA,,1 !vía
AATT,1,,2,,1
AMESH,ALL
ALLSEL,ALL
!-----
LSEL,S,LINE,,5,8,1
LESIZE,ALL,D
ASEL,S,AREA,,2 !LOSA
AATT,1,,2,,2
AMESH,ALL
ALLSEL,ALL
!-----
LSEL,S,LINE,,9,12,1
LESIZE,ALL,D/2
ASEL,S,AREA,,3 !FORJADO 1
AATT,1,,2,,3
AMESH,ALL
ALLSEL,ALL
!-----
LSEL,S,LINE,,13,16,1
LESIZE,ALL,D/2
ASEL,S,AREA,,4 !FORJADO 2
AATT,1,,2,,3
AMESH,ALL
ALLSEL,ALL
!-----
LSEL,S,LINE,,17,20,1
LESIZE,ALL,D/2
ASEL,S,AREA,,5 !FORJADO 3
AATT,1,,2,,3
AMESH,ALL
ALLSEL,ALL
!-----
!todos los pilares
LSEL,S,LINE,,21,32,1
LESIZE,ALL,D/2
LATT,1,,3,,,4
LMESH,ALL
ALLSEL,ALL
!-----
BLC5,(B/2),(A/2),B,A,-8
!-----
VSEL,S,VOLU,,1
ESIZE,D
TYPE,1
MAT,2
VMESH,ALL
ALLSEL
!-----

```

```
!los nodos de la vía (elementos tipo placa) y de la losa superficial de edif
!acoplan sus GDL con el suelo
CPINTF,UX,0.001
CPINTF,UY,0.001
CPINTF,UZ,0.001
;%%%%%%%%
!-----
!COND CONTORNO : restringidos todos los GDL de los contornos
!-----

NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,A,LOC,X,B
NSEL,A,LOC,Y,0
NSEL,A,LOC,Y,A
NSEL,A,LOC,Z,-8
D,ALL,ALL

ALLSEL,ALL

FINISH
```

CÓDIGO 11. Código de ANSYS APDL para generar el modelo de estructura y vía próxima con elementos infinitos

Idéntico al código anterior agregando en la línea donde aparece ;%%%% las siguientes líneas. No se aplican condiciones de contorno en el modelo.

```
!-----
!GENERACIÓN DE ELEMENTOS INFINITOS:
!-----

!POLO
NP=node (B/2,A/2,0)

NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,A,LOC,X,B
NSEL,A,LOC,Y,0
NSEL,A,LOC,Y,A
NSEL,A,LOC,Z,-8

EINFIN,,NP

ALLSEL,ALL
```

***NOTA:** El análisis transitorio se hará de igual forma que para el caso del puente viga, en su correspondiente línea de carga, y teniendo en cuenta la relación $dx=Vdt$, de cara al mallado. Se ha de considerar un tamaño de elemento idéntico para el suelo y los elementos placa que deben acoplar sus GDL.